

Nucleo e immagine

Nucleo. $f: V \rightarrow W$ lineare $\rightsquigarrow$

$$\ker f \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subset V$$

Def. $\ker f$ si chiama *nucleo* di f (dall'inglese *kernel*).

Oss. Dato $v \in V$, si ha che $v \in \ker f \Leftrightarrow f(v) = 0_W$.

Oss. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \ker L_A = \Sigma_S$ con $S: AX = 0_{\mathbb{K}^m}$.

Teor. $f: V \rightarrow W$ lineare $\Rightarrow \ker f$ sottospazio vettoriale di V .

Dim. $f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \ker f \neq \emptyset$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \ker f \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = 0_W \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \ker f$. $\square$

Def. $f: V \rightarrow W$ è *iniettiva* se $\forall u, v \in V, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.

Teor. $f: V \rightarrow W$ lineare. Allora f iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0_V\}$.

Dim. $\Rightarrow \forall v \in \ker f \Rightarrow f(v) = f(0_V) = 0_W \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow \ker f = \{0_V\}$.

$\Leftarrow \forall u, v \in V, f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_W \Rightarrow f(u - v) = 0_W \Rightarrow u - v \in \ker f = \{0_V\} \Rightarrow u - v = 0_V \Rightarrow u = v$. $\square$

Cor. $f: V \rightarrow W$ lineare. Allora f iniettiva $\Leftrightarrow \dim(\ker f) = 0$.

Nucleo di L_A . Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, L_A(X) = AX$.

$X \in \ker L_A \Leftrightarrow L_A(X) = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow AX = 0_{\mathbb{K}^m} \Leftrightarrow X$ è soluzione del sistema

$$S_A: AX = 0_{\mathbb{K}^m}$$

Prop. $\ker L_A$ è lo spazio delle soluzioni di $S_A: AX = 0_{\mathbb{K}^m}$.

Immagine. $f: V \rightarrow W$ lineare $\rightsquigarrow$

$$\text{im } f \stackrel{\text{def}}{=} \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$$

Def. $\text{im } f$ si chiama *immagine* di f .

Oss. Dato $w \in W$, si ha che $w \in \text{im } f \Leftrightarrow \exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$.

Teor. $f: V \rightarrow W$ lineare $\Rightarrow \text{im } f$ sottospazio vettoriale di W .

Dim. $f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_W \in \text{im } f \neq \emptyset$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall w_1, w_2 \in \text{im } f \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2 \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \text{im } f$. $\square$

Def. $f: V \rightarrow W$ è *suriettiva* se $\text{im } f = W$.

Oss. f suriettiva $\Leftrightarrow \forall w \in W, \exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$.

Def. $\text{rg } f \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{im } f)$ si chiama *rango* di f .

Oss. $f: V \rightarrow W$ lineare, $\dim W < \infty$. Allora f suriettiva $\Leftrightarrow \text{rg } f = \dim W$.

Generatori per l'immagine

Prop. $V = \text{span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \text{im } f = \text{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Dim. $f(v_1), \dots, f(v_n) \in \text{im } f \Rightarrow \text{span}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \subset \text{im } f$.

$\forall w \in \text{im } f, \exists v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ t.c.

$$w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) \in \text{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

$\Rightarrow \text{im } f \subset \text{span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ e quindi si ha la tesi. $\square$

Cor. Per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha $\text{im } L_A = \text{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$.

Dim. $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, L_A(X) = AX$. $(e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n \Rightarrow$
 $\text{im } L_A = \text{span}(L_A(e_1), \dots, L_A(e_n))$.

$$\begin{aligned} L_A(e_1) &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{(1)} \\ &\vdots \\ L_A(e_n) &= A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{(n)} \end{aligned}$$

$\square$

Cor. $\text{rg } L_A = \text{rg } A$.

Dim. $\text{rg } L_A = \dim(\text{im } L_A) = \dim(\text{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})) = \text{rg } A$. $\square$

Cor. $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ suriettiva $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$.

Teorema della dimensione

Teor. $f: V \rightarrow W$ lineare e $\dim V < \infty \Rightarrow \dim V = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f$.

Dim. $\dim V = n$, $\dim(\ker f) = k \leq n$.

$(u_1, \dots, u_k)$ base per $\ker f \rightsquigarrow (u_1, \dots, u_k, \underbrace{v_1, \dots, v_{n-k}}_{\text{complemento della base}})$ base per V .

$f(u_i) = 0_W$, $w_i := f(v_i) \Rightarrow w_1, \dots, w_{n-k}$ generatori di $\operatorname{im} f$.

Mostriamo che $w_1, \dots, w_{n-k}$ sono linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i w_i = 0_W &\Rightarrow 0_W = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i\right) \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i &\in \ker f \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \beta_i u_i \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^k \beta_i u_i &= 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0, \beta_i = 0, \forall i. \end{aligned}$$

$(w_1, \dots, w_{n-k})$ base per $\operatorname{im} f \Rightarrow \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{im} f) = n - k \Rightarrow$
 $\dim(\ker f) + \operatorname{rg} f = k + n - k = \dim V.$

□