

Matrice dell'applicazione composta

V, W, U spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = \ell$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V con coordinate $X = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ base per W con coordinate $Y = (y_1, \dots, y_m)$

$\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_\ell)$ base per U con coordinate $Z = (z_1, \dots, z_\ell)$

Applicazioni lineari

$$\begin{array}{lll} f: V \rightarrow W & g: W \rightarrow U & g \circ f: V \rightarrow U \\ A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) & B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(g) & C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g \circ f) \\ m \times n & \ell \times m & \ell \times n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \xrightarrow{g} U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & AX \xrightarrow{g} BAX \\ & \searrow & \uparrow \\ & & C = BA \end{array}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$$

Matrici di isomorfismi

$\dim V = \dim W = n$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ base per W

$f: V \rightarrow W$ isomorfismo

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_V \Rightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = I_n$$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_W \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) = I_n$$

Dunque $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile e si ha

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f))^{-1}$$

Cor. $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$ (rango massimo).

Matrice del cambio di base

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V con coordinate $X = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ altra base per V con coordinate $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si chiama *matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$* .

$$X' = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \cdot X$$

Oss. La matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha come j -esima colonna le coordinate di b_j rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

N.B. Una matrice del cambio di base è sempre quadrata e *invertibile*.

Cambio di base per applicazioni lineari

$f: V \rightarrow W$ lineare, $\dim V = n$, $\dim W = m$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ basi per V

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$, $\mathcal{C}' = (c'_1, \dots, c'_m)$ basi per W

$$f = \text{id}_W \circ f \circ \text{id}_V$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B} & M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) & \mathcal{C} & & \\ M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) & & M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) & & \\ \mathcal{B}' & M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) & \mathcal{C}' & & \end{array}$$

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\text{id}_W) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$$

Cambio di base per gli endomorfismi. $f: V \rightarrow V$ endomorfismo. Consideriamo due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ per V . Poniamo $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$.

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$$

Poniamo $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) \in M_n(\mathbb{K})$, $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Ricordiamo che

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) &= (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V))^{-1} \\ A' &= P^{-1}AP \end{aligned}$$

Prop. $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a due basi se e solo se A e A' sono simili.

Oss. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ simili $\Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B$.

Nucleo e immagine. Per trovare il nucleo di $f: V \rightarrow W$ in coordinate, si fissano basi $\mathcal{B}$ per V e $\mathcal{C}$ per $W \rightsquigarrow A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ e si risolve il sistema

$$\ker f: AX = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema omogeneo rappresenta $\ker f$. Lo spazio delle colonne di A , ossia $\text{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$, rappresenta $\text{im } f$.

$$\text{rg } f = \text{rg } A.$$

Determinante come funzione multilineare

Una matrice $n \times n$ è essenzialmente una n -upla ordinata di vettori colonna di $\mathbb{K}^n$, ossia $A = (v_1, \dots, v_n)$ con $v_i = A_{(i)}$.

$$\det : M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{K}$$

è funzione delle colonne di una matrice. Si può dimostrare che $\det$ soddisfa le seguenti proprietà (dove ci sono $\dots$ non modifichiamo nulla):

$$\det(\dots, v + w, \dots) = \det(\dots, v, \dots) + \det(\dots, w, \dots)$$

$$\det(\dots, \alpha v, \dots) = \alpha \det(\dots, v, \dots).$$

In altre parole $\det$ è lineare rispetto a ciascuna colonna, tenendo fisse le altre. Per questo motivo si dice che $\det$ è *multilineare nelle colonne*, ossia è lineare rispetto a ciascuna colonna.

Dato che $\det A = \det {}^tA$ si ha che $\det$ è *multilineare nelle righe*.

Spazio delle applicazioni lineari

Definiamo lo *spazio delle applicazioni lineari* da V a W

$$\text{Hom}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ lineare}\}$$

Date applicazioni lineari $f, g : V \rightarrow W$ definiamo la *somma*

$$f + g : V \rightarrow W$$

$$(f + g)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(v) + g(v)$$

e la *moltiplicazione scalare* per $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha f : V \rightarrow W$$

$$(\alpha f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(v).$$

È facile dimostrare che $f + g$ e αf sono lineari e con queste operazioni $\text{Hom}(V, W)$ è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale.

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ base per W

$\forall f, g \in \text{Hom}(V, W), \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f + g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\alpha f) = \alpha M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$$

Prop. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}), f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, è un isomorfismo.

$M_{m,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn} \Rightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn \Rightarrow \dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \dim W$.

Definiamo lo *spazio degli endomorfismi* di V

$$\text{End}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(V, V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ lineare}\}.$$

$\text{End}(V)$ è uno spazio vettoriale e $\dim \text{End}(V) = (\dim V)^2$.