

Determinante di un endomorfismo

Def. Sia $f \in \text{End}(V)$ e sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base per V . Si chiama *determinante* di f il numero

$$\det f \stackrel{\text{def}}{=} \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}.$$

Oss. Il determinante di un endomorfismo è definito come il determinante di una sua matrice rispetto ad una base arbitraria di V , usando la *stessa* base sia nel dominio che nel codominio.

Oss. $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ altra base per $V \Rightarrow \det M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ perché sono matrici simili. Quindi $\det f$ è ben definito (non dipende dalla base).

Oss. $f, g \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$ (Teorema di Binet).

Oss. f isomorfismo $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det f \neq 0$. $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$.

Prop. Sia $f \in \text{End}(V)$ e $0 \neq \dim V < \infty$. Allora $\ker f \neq 0 \Leftrightarrow \det f = 0$.

Problema della diagonalizzazione

Dato $f \in \text{End}(V)$ vorremmo trovare una base $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ per V t.c. $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ sia la più semplice possibile: una matrice diagonale.

Def. $f \in \text{End}(V)$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{D}$ per V t.c. $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ sia una matrice diagonale. $\mathcal{D}$ è detta *base diagonalizzante*.

Ricordando che la i -esima colonna di $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ è il vettore delle coordinate di $f(v_i)$ si ha subito la seguente proposizione.

Prop. $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ base diagonalizzante $f \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$f(v_i) = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Inoltre $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Oss. Se $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora f si scrive in coordinate come

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Autovalori e autovettori

Def. Dato $f \in \text{End}(V)$, uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto *autovalore* di f se esiste un vettore *non nullo* $v \in V$ t.c. $f(v) = \lambda v$. In questo caso v è detto *autovettore* per f relativo all'autovalore λ .

Oss. $v \in V$ autovettore per $f \Leftrightarrow v \neq 0_V$ e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

N.B. Vogliamo $v \neq 0_V$ perché altrimenti la definizione sarebbe banale: per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $f(0_V) = \lambda 0_V$.

Cor. Una base per V diagonalizza $f \in \text{End}(V) \Leftrightarrow$ è formata da autovettori.

Polinomio caratteristico

Supponiamo $\dim V = n < \infty$.

Def. Il *polinomio caratteristico* di $f \in \text{End}(V)$ è $p_f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(f - x \text{id}_V)$.

Def. Il *polinomio caratteristico* di $A \in M_n(\mathbb{K})$ è $p_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - xI_n)$.

Oss. p_A è un polinomio di grado n perché si esprime mediante prodotti e somme di entrate della matrice

$$A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix}$$

Il prodotto delle entrate sulla diagonale principale è l'unico termine da cui scaturisce $(-1)^n x^n$ (gli altri termini sono monomi di grado $< n$). Quindi $p_A(x)$ ha grado n e coefficiente direttore $(-1)^n = \pm 1$.

Il termine noto è $p_A(0) = \det A$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) + 2$$

$$p_A(x) = x^2 - 4x + 5.$$

Prop. Sia $f: V \rightarrow V$ endomorfismo di un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale V . Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{K}$ è radice di p_f , ossia $p_f(\lambda) = 0$.

Dim. $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $f \Leftrightarrow \exists v \in V$ non nullo t.c.

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0_V \Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{id}_V) \neq \{0_V\} \Leftrightarrow$$

$$p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \text{id}_V) = 0. \quad \square$$

Prop. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V e $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \Rightarrow p_f(x) = p_A(x)$.

Quindi p_f è un polinomio di grado $n = \dim V$.

$$\text{Dim. } p_f(x) = \det(f - x \text{id}_V) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - x \text{id}_V) = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - x M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V))$$

$$= \det(A - xI_n) = p_A(x). \quad \square$$

N.B. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gli autovalori di $f \in \text{End}(V)$ sono le radici *reali* di p_f .

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si considerano tutte le radici di p_f .