

Determinante

Matrici di ordine 2. Data una matrice quadrata di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$$

vogliamo capire in quali casi il sistema lineare omogeneo

$$AX = 0_{\mathbb{K}^2}$$

ammette soltanto la soluzione banale. Per semplicità supponiamo $a \neq 0$. Con Gauss abbiamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

Il sistema ammette un'unica soluzione (quella banale) $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.

Caso generale. Definiremo una funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, chiamata *determinante*, che ad ogni matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ associa uno scalare $\det A \in \mathbb{K}$. Vogliamo che tale funzione abbia le seguenti proprietà:

0) $\det I_n = 1$

1) $\det A' = -\det A$, se A' si ottiene da A scambiando due righe

2) $\det A' = \alpha \det A$, se A' si ottiene da A moltiplicando una riga per $\alpha \in \mathbb{K}$

3) $\det A' = \det A$, se A' si ottiene da A con oper. element. tipo III.

La definizione di $\det$ è *ricorsiva*: prima definiamo $\det$ per matrici 1×1 (scalari). In secondo luogo, supponendo di saper calcolare $\det$ su matrici di ordine $n - 1$, lo definiamo sulle matrici di ordine $n \geq 2$.

Indichiamo con $A_{\widehat{ij}} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice ottenuta da A eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna.

N.B. Non confondere $A_{\widehat{ij}} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ con $A_{ij} \in \mathbb{K}$, l'entrata (i, j) di A .

$n = 1$. $\det(a) \stackrel{\text{def}}{=} a, \forall a \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

$n \geq 2$. Supponiamo di aver definito $\det$ per le matrici di ordine $n - 1 \geq 1$. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ definiamo

$$\det A = |A| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} \det A_{\widehat{1j}}.$$

$n = 2$. Riotteniamo la formula ricavata all'inizio.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Prop. $\det A = \det {}^tA$.

Oss. Dalla proprietà (1) segue che $\det A = 0$ se A ha due righe (o due colonne) uguali. Infatti scambiandole sia ha $\det A = -\det A = 0$.

Matrici triangolari. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ è *triangolare superiore* se le entrate sotto la diagonale principale sono nulle, ossia $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

Similmente A è *triangolare inferiore* se le entrate sopra la diagonale principale sono nulle, ossia $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Oss. A a gradini $\not\Rightarrow A$ triangolare superiore.

Oss. A triangolare superiore $\Leftrightarrow {}^tA$ triangolare inferiore.

Esempio. La matrice seguente è triangolare superiore ma non a gradini.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è triangolare inferiore, dalla definizione si ha

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$

prodotto delle entrate sulla diagonale principale, perché $a_{1j} = 0, \forall j > 1$. Questo vale per tutte le matrici triangolari, inferiori o superiori (in particolare per matrici diagonali), dato che $\det$ non cambia per trasposizione.

Calcolo di $\det$ mediante Gauss. In genere è conveniente usare le proprietà (0)–(3) per calcolare $\det$, riducendo la matrice a gradini (quindi triangolare).

Se A' a gradini è ottenuta da A mediante operazioni elementari di tipo *I* e *III* (attenzione! non *II*) allora

$$\det A = (-1)^k \det A'$$

dove k è il numero di operazioni di tipo *I* che sono state utilizzate (ciascuna operazione di tipo *I* fa cambiare il segno a $\det$). Con operazioni di tipo *II* si possono fare semplificazioni per esempio raccogliendo un coefficiente da una riga o colonna.

Cofattori o complementi algebrici. Data $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, il *cofattore* o *complemento algebrico* dell'entrata (i, j) è

$$\text{cof}_{ij}(A) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det A_{\widehat{i}\widehat{j}} \in \mathbb{K}.$$

Definiamo la *matrice cofattore* $\text{cof}(A) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{cof}_{ij}(A)) \in M_n(\mathbb{K})$.

Formule di Laplace. Per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha lo *sviluppo di* $\det A$ secondo la i -esima riga

$$\det A = \sum_{j=1}^n A_{ij} \operatorname{cof}_{ij}(A).$$

Per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha lo *sviluppo di* $\det A$ secondo la j -esima colonna

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{ij} \operatorname{cof}_{ij}(A).$$

Oss. La formula ricorsiva usata per definire $\det$ è lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga.

Convienne sviluppare $\det A$ secondo la riga o colonna col maggior numero di entrate nulle.

Gruppo lineare generale

Def. $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ invertibile}\}$ si chiama *gruppo lineare generale di ordine n su $\mathbb{K}$* . È l'insieme delle matrici invertibili $n \times n$.

Oss.

- 1) $I_n \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$.
- 2) $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in \operatorname{GL}_n(K)$.
- 3) $A, B \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in \operatorname{GL}_n(K)$ e si ha

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Infatti: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$.

Matrici simili

Def. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono *simili* se $\exists P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$B = P^{-1}AP.$$

Oss. I_n è simile solo a sé stessa: $P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n$, $\forall P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$. Analogamente la matrice nulla $0 \in M_n(\mathbb{K})$ è simile solo a sé stessa.

Teorema di Binet

Teor. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Cor. $\forall A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Dim. $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, da cui la tesi. □

Cor. Matrici simili hanno lo stesso determinante.

Dim. $\det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$. □