Matrice inversa

Il metodo più efficiente per calcolare la matrice inversa di $A \in M_n(\mathbb{K})$ è il seguente: si applica il metodo di Gauss alla matrice $(A \mid I_n)$, portando A a gradini e se vi sono n pivot si può applicare di nuovo Gauss a ritroso per ottenere I_n nelle prime n colonne. Le colonne restanti formano A^{-1}.

$$(A \mid I_n) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} (I_n \mid A^{-1}).$$

Un altro metodo

Teor. *$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ si ha $A\,{}^t\mathrm{cof}(A) = (\det A)I_n$.*

Dim. Dimostriamo che $(A\,{}^t\mathrm{cof}(A))_{ij} = ((\det A)I_n)_{ij}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$.

$\boxed{i = j}$

$$\begin{aligned}(A\,{}^t\mathrm{cof}(A))_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}({}^t\mathrm{cof}(A))_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,\mathrm{cof}_{ik}(A) \qquad \text{(Laplace su riga } i\text{)} \\ &= \det A = ((\det A)I_n)_{ii}\end{aligned}$$

$\boxed{i \neq j}$ Consideriamo la matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ ottenuta da A duplicando la riga i-esima al posto della j-esima

$$B^{(k)} = \begin{cases} A^{(k)}, & \text{se } k \neq j \\ A^{(i)}, & \text{se } k = j \end{cases}$$

B ha due righe uguali $B^{(i)} = B^{(j)} = A^{(i)} \Rightarrow \det B = 0$.
$A_{\widehat{jk}} = B_{\widehat{jk}} \Rightarrow \mathrm{cof}_{jk}(A) = \mathrm{cof}_{jk}(B)$ perché la riga j viene cancellata.

$$\begin{aligned}(A\,{}^t\mathrm{cof}(A))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}({}^t\mathrm{cof}(A))_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,\mathrm{cof}_{jk}(A) \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{jk}\,\mathrm{cof}_{jk}(B) \qquad \text{(Laplace riga } j\text{)} \\ &= \det B = 0 = ((\det A)I_n)_{ij}.\end{aligned}$$ □

Cor. $\det A \neq 0 \Rightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K)$ *e* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}\,A$.

Dim. $A\left(\frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}\,A\right) = I_n$. □

Cor. *Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ si ha $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$.*

Teorema di Cramer

Un sistema lineare

$$AX = B$$

con $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ha l'unica soluzione

$$X = A^{-1}B$$

che si ottiene moltiplicando a sinistra entrambi i membri per A^{-1}.
Il teorema seguente fornisce una formula per calcolare la soluzione.

Teor. *Siano $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^n$. La soluzione del sistema lineare*

$$AX = B$$

è data da

$$x_i = \frac{\det \widehat{A}_i}{\det A} \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

dove $\widehat{A}_i$ è la matrice ottenuta da A sostituendo B al posto della i-esima colonna.

Dim. $X = A^{-1}B$ da cui si ha:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{ik} b_k = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} ({}^t\mathrm{cof}(A))_{ik} b_k \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b_k \,\mathrm{cof}(A)_{ki} \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b_k \,\mathrm{cof}(\widehat{A}_i)_{ki} \qquad \text{(Laplace su colonna } i\text{)} \\ &= \frac{\det \widehat{A}_i}{\det A}. \end{aligned}$$

□