

Basi ortonormali

V spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Prop. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ a due a due ortogonali e non nulli. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Dim. Per ipotesi $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

$$\langle v_i, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 = 0.$$

$\|v_i\| \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i$, quindi sono linearmente indipendenti. $\square$

Def. Una base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per V è *ortogonale* se $\langle b_i, b_j \rangle = 0, \forall i \neq j$. $\mathcal{B}$ è *ortonormale* se $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$.

Oss. $\mathcal{B}$ ortonormale $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$.

Oss. Normalizzando una base ortogonale se ne ottiene una ortonormale.

Oss. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \exists u_1, \dots, u_n \in V$ non nulli e a due a due ortogonali t.c.

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(u_1, \dots, u_k), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Dim. Definiamo gli u_k in modo ricorsivo e procediamo per induzione su k .

$$u_1 := v_1$$

$$u_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \quad \text{per } k \geq 2.$$

Ipotesi induttiva: per $i, j \leq k-1, i \neq j$ si ha $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. Pertanto:

$$\langle u_k, u_j \rangle = \langle v_k, u_j \rangle - \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_j \rangle = 0$$

$\text{span}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1}) \Rightarrow v_k \in \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$ e
 $u_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow \text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(u_1, \dots, u_k), u_k \neq 0_V.$ $\square$

Oss. I vettori u_k possono essere moltiplicati per scalari non nulli preservando le proprietà dell'enunciato. Questo a volte semplifica i calcoli.

Cor. V spazio vett. Euclideo, $\dim V < \infty \Rightarrow V$ ammette base ortonormale.

Esempio. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando si ha la base ortonormale per $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio. $U \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio vettoriale di equazione

$$U: x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Determiniamo una base di U .

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 - t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{-1}{2} u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{-1}{2} u_1 - \frac{1}{6} u_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per determinare una base ortonormale per U basta normalizzare gli u_i .

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoli mediante basi ortonormali

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale per V .

$$\langle v, w \rangle = {}^tXY = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$d(v, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$\widehat{vw} = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

$$x_i = \langle v, b_i \rangle, \quad v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i.$$

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$w = \sum_{i=1}^n y_i b_i \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pertanto le formule per prodotto scalare, la norma, distanza rispetto ad una base ortonormale coincidono con le analoghe formule viste su $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico. Le coordinate rispetto ad una base ortonormale sono i prodotti scalari con i vettori di base.

Prop. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica definita positiva $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $A = {}^tPP$. Quindi $\det A > 0$ e $\operatorname{rg} A = n$.

Dim. $b_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ prodotto scalare $\Rightarrow \exists \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale $\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(b_A) = I_n$ congruente ad $A \rightsquigarrow P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}^n}) \in GL_n(\mathbb{R})$
 $\rightsquigarrow A = {}^tPI_nP = {}^tPP \Rightarrow \det A = (\det P)^2 > 0$. $\square$

Esempio. Consideriamo il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ indotto dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto quest'esempio e sappiamo che A è definita positiva. La base canonica di $\mathbb{R}^2$ non è ortonormale. Usiamo Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 \\ u_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \|u_1\| &= \sqrt{2} & b_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \|u_2\| &= \sqrt{{}^tu_2Au_2} = \sqrt{2} & b_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ base ortonormale $\Rightarrow A = {}^tPP$ con $P = (b_1 \ b_2)^{-1}$.

Completamento della base ortonormale. $\dim V = n$ e $u_1, \dots, u_k \in V$ vettori ortonormali $\Rightarrow \exists u_{k+1}, \dots, u_n \in V$ t.c. $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale per V .

Dim. Completiamo $u_1, \dots, u_k$ ad una base per V aggiungendo certi vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$. Applicando Gram-Schmidt e normalizzazione a

$$u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

i primi k vettori non cambiano perché ortonormali tra loro $\rightsquigarrow u_1, \dots, u_n$ base ortonormale per V . $\square$

Sottospazi vettoriali ortogonali. Due sottospazi vettoriali $U, W \subset V$ sono ortogonali se $\langle u, w \rangle = 0, \forall u \in U$ e $\forall w \in W$. Scriviamo $U \perp W$.

Oss. $U \perp W \Leftrightarrow$ ogni vettore di U è ortogonale ad ogni vettore di W .

Complemento ortogonale. $U \subset V$ sottospazio vettoriale

$$U^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$$

Def. $U^\perp$ è detto *complemento ortogonale* o anche solo *ortogonale* di U .

Oss. $U \cap U^\perp = \{0_V\}$. Infatti $\forall v \in U \cap U^\perp \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

Teor. $U^\perp \subset V$ è il più grande sottospazio vettoriale di V ortogonale a U .

Dim. $0_V \in U^\perp$ dato che $\langle 0_V, u \rangle = 0, \forall u \in U$. $\forall v, w \in U^\perp, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in U \Rightarrow$
 $\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle = 0 \Rightarrow \alpha v + \beta w \in U^\perp$ $\square$