

Sottospazi affini

V spazio vettoriale reale o complesso ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$).

Def. La *traslazione di vettore* $v \in V$ è la funzione

$$\begin{aligned} t_v : V &\rightarrow V \\ t_v(u) &= u + v. \end{aligned}$$

Oss. $t_v(0_V) = v$.

Prop. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} t_{0_V} &= \text{id}_V \\ t_v \circ t_w &= t_{v+w} \\ t_v^{-1} &= t_{-v} \Rightarrow t_v \text{ biiettiva.} \end{aligned}$$

Dato $A \subset V$ e $v \in V$ definiamo il traslato

$$A + v \stackrel{\text{def}}{=} t_v(A) = \{a + v \mid a \in A\} \subset V.$$

Def. Un sottoinsieme $A \subset V$ è detto *sottospazio affine di* V se $\exists A_0 \subset V$ sottospazio vettoriale e $\exists v \in V$ t.c. $A = A_0 + v$. A_0 è detto *giacitura* di A . Poniamo $\dim A \stackrel{\text{def}}{=} \dim A_0$. Gli elementi di A si chiamano *punti*.

In particolare V stesso è sottospazio affine e si chiama *spazio affine*.

Oss. I sottospazi affini sono non vuoti.

$\dim A = 0$ *Punto.*

$\dim A = 1$ *Retta affine.*

$\dim A = 2$ *Piano affine.*

Oss. I sottospazi affini sono i traslati dei sottospazi vettoriali.

I sottospazi vettoriali sono anche sottospazi affini. Un sottospazio affine $A \subset V$ è vettoriale $\Leftrightarrow 0_V \in A$.

Oss. Ogni punto $a \in A = A_0 + v$ si può scrivere come $a = a_0 + v$ per un unico $a_0 \in A_0$.

Dati due punti qualsiasi $a = a_0 + v$ e $b = b_0 + v$ di un sottospazio affine $A \subset V$ con giacitura $A_0 \subset V$ si ha

$$b - a = b_0 - a_0 \in A_0.$$

Dato un vettore $u \in A_0$ si ha

$$a + u = a_0 + u + v \in A$$

perché $a_0 + u \in A_0$. Dunque la differenza di due punti di A è un vettore di A_0 , e la somma di un punto di A e di un vettore di A_0 è un punto di A .

Def. $b - a \in A_0$ è detto *vettore* ab .

Prop. Sia $A_0 \subset V$ un sottospazio vettoriale e sia $a \in V$. Allora esiste un unico sottospazio affine $A \subset V$ passante per a con giacitura A_0 .

Dim. Esistenza. Basta porre $A := A_0 + a \Rightarrow a = 0_V + a \in A$.

Unicità. Se $A' = A_0 + v \subset V$ è un qualunque sottospazio affine passante per a con giacitura $A_0 \Rightarrow a = a_0 + v$ per un certo $a_0 \in A_0 \Rightarrow A = A_0 + a = A_0 + a_0 + v = A'$ perché $A_0 + a_0 = A_0$. □

Teorema di struttura per sistemi lineari. Sia $S: AX = B$ un sistema lineare compatibile, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$. Allora $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine con giacitura lo spazio delle soluzioni Σ_{S_0} del sistema omogeneo associato $S_0: AX = 0_{\mathbb{K}^m}$. $\dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0} = n - \text{rg}(A)$.

Dim. $\Sigma_{S_0} = \ker L_A \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio vettoriale, $\dim \Sigma_{S_0} = n - \text{rg } A$.

Scegliamo una soluzione $s \in \Sigma_S$ (esiste perché S compatibile) $\Rightarrow As = B$.

$v \in \Sigma_S \Leftrightarrow Av = B = As \Leftrightarrow 0_{\mathbb{K}^m} = Av - As = A(v - s) \Leftrightarrow v - s \in \Sigma_{S_0}$
 $\Leftrightarrow v \in s + \Sigma_{S_0} \Rightarrow \Sigma_S = s + \Sigma_{S_0}$. □

Oss.

S incompatibile $\Leftrightarrow \Sigma_S = \emptyset$ non è sottospazio affine.

Σ_S sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow S$ omogeneo.