

$A \subset V$ sottospazio affine passante per $a \in V$ e con giacitura A_0

$$A = A_0 + a.$$

Scegliamo una base $(u_1, \dots, u_k)$ per A_0 , quindi $\dim A = \dim A_0 = k$.

$$A: v = t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k + a$$
$$A_0 : v = t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k.$$

L'equazione vettoriale di A si scrive in coordinate

$$A: X = t_1 C_1 + \cdots + t_k C_k + Q$$

dove X è il vettore delle coordinate di v , C_j di u_j e Q di a , rispetto a $\mathcal{B}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$$A: \begin{cases} x_1 = c_{11}t_1 + \cdots + c_{1k}t_k + q_1 \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}t_1 + \cdots + c_{nk}t_k + q_n \end{cases}$$

sono dette *equazioni parametriche* di A . A_0 ha equazioni parametriche

$$A_0 : \begin{cases} x_1 = c_{11}t_1 + \cdots + c_{1k}t_k \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}t_1 + \cdots + c_{nk}t_k \end{cases}$$

Equazione cartesiana. Eliminando i parametri $t_1, \dots, t_k$ dalle equazioni parametriche si ottengono le *equazioni cartesiane*

$$A: \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

A è l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano questo sistema lineare.
 A_0 ha equazioni cartesiane

$$A_0 : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Pertanto otteniamo l'inverso del Teorema di struttura: *ogni sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare compatibile.*

Il passaggio tra i vari tipi di equazioni è analogo a quanto visto nel caso dei sottospazi vettoriali.

Posizione reciproca di due sottospazi affini

Intersezione di sottospazi vettoriali. $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali $\Rightarrow$

$$U \cap W = \{v \in V \mid v \in U \text{ e } v \in W\} \subset V$$

sottospazio vettoriale. Infatti:

$0_V \in U \cap W$ perché 0_V appartiene sia a U che a W ;

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U \cap W$.

In termini di equazioni cartesiane abbiamo

$$\begin{array}{ll} A: FX = 0 & \\ B: GX = 0 & \end{array} \quad A \cap B: \begin{cases} FX = 0 \\ GX = 0 \end{cases}$$

dove F e G sono matrici.

Intersezione di sottospazi affini. $A, B \subset V$ sottospazi affini $\Rightarrow$

$$A \cap B = \{v \in V \mid v \in A \text{ e } v \in B\} \subset V$$

sottospazio affine oppure vuoto. Infatti se $A \cap B \neq \emptyset$ scegliamo un punto $a \in A \cap B$ e abbiamo

$$A \cap B = (A_0 \cap B_0) + a.$$

Quindi la giacitura di $A \cap B$ è l'intersezione delle rispettive giaciture

$$(A \cap B)_0 = A_0 \cap B_0.$$

In termini di equazioni cartesiane abbiamo

$$\begin{array}{ll} A: FX = P & \\ B: GX = Q & \end{array} \quad A \cap B: \begin{cases} FX = P \\ GX = Q \end{cases}$$

Def. Due sottospazi affini A e $B \subset V$ con giaciture risp. A_0 e B_0 sono

- 1) *incidenti* se $A \cap B \neq \emptyset$;
- 2) *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$;
- 3) *paralleli* se $A_0 \subset B_0$ oppure $B_0 \subset A_0$, e scriviamo $A \parallel B$;
- 4) *sghembi* se $A \cap B = \emptyset$ e $A \not\parallel B$ (A e B disgiunti e non paralleli).

Oss. Se $\dim A = \dim B < \infty$ allora $A \parallel B \Leftrightarrow A_0 = B_0$.

Teor ("Postulato delle parallele"). Sia $A \subset V$ un sottospazio affine di dimensione finita e sia $b \in V$ un punto qualsiasi. Allora $\exists!$ $B \subset V$ sottospazio affine passante per b t.c. $B \parallel A$ e $\dim B = \dim A$.

Dim. L'unico sottospazio affine che soddisfa la tesi è $B = A_0 + b$. □

Per capire la posizione reciproca di due sottospazi affini si scrivono le equazioni cartesiane e si studia il sistema formato da tutte le equazioni messe insieme. Si applica Rouché-Capelli per capire la compatibilità e la dimensione dell'intersezione (se non vuota).

Nel seguito indichiamo con A la matrice dei coefficienti del sistema formato da tutte le equazioni coinvolte e con $\tilde{A}$ la matrice completa. Si osservi che in generale

$$\operatorname{rg} \tilde{A} = \begin{cases} \operatorname{rg} A \\ \operatorname{rg} A + 1 \end{cases} \quad (\text{se i ranghi sono diversi})$$

perché $\tilde{A}$ si ottiene da A aggiungendo una colonna.

In $\mathbb{R}^2$

Due rette $r, s \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{l} r: ax + by = c \\ s: dx + ey = f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r = s \Leftrightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = 1 \\ r \parallel s \text{ e } r \cap s = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 1 \text{ e } \operatorname{rg} \tilde{A} = 2 \\ r \cap s = \text{punto} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2. \end{array}$$

In $\mathbb{R}^3$

Due piani $p, q \subset \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{l} p: ax + by + cz = d \\ q: ex + fy + gz = h \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p = q \Leftrightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = 1 \\ p \parallel q \text{ e } p \cap q = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 1 \text{ e } \operatorname{rg} \tilde{A} = 2 \\ p \cap q = \text{retta} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2. \end{array}$$

Retta e piano $r, p \subset \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{l} r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \\ p: ex + fy + gz = h \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r \subset p \Leftrightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = 2 \\ r \parallel p \text{ e } r \cap p = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2 \text{ e } \operatorname{rg} \tilde{A} = 3 \\ r \cap p = \text{punto} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 3. \end{array}$$

Due rette $r, s \subset \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{l} r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \\ s: \begin{cases} e_1x + f_1y + g_1z = h_1 \\ e_2x + f_2y + g_2z = h_2 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r = s \Leftrightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = 2 \\ r \parallel s \text{ e } r \cap s = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 2 \text{ e } \operatorname{rg} \tilde{A} = 3 \\ r \cap s = \text{punto} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = 3 \\ r \text{ e } s \text{ sghembe} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = 4. \end{array}$$

Sottospazio affine generato da un sottoinsieme

$P_0, \dots, P_k \in V \rightsquigarrow A(P_0, \dots, P_k) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0) + P_0$

$P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0 \in V$ lin. indep. $\Leftrightarrow \dim A(P_0, \dots, P_k) = k$.

Equazione vettoriale di $A(P_0, \dots, P_k)$

$$v = t_1(P_1 - P_0) + \dots + t_k(P_k - P_0) + P_0$$

Oss. La giacitura di $A(P_0, \dots, P_k)$ è $\text{span}(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0)$.

Oss. $P_i \in A(P_0, \dots, P_k)$, $\forall i = 0, \dots, k$. Infatti $P_i = (P_i - P_0) + P_0$.

Oss. $A(P_0, \dots, P_k)$ non dipende dall'ordine dei punti $P_0, \dots, P_k$. Infatti

$$A(P_0, \dots, P_k) = \{t_0 P_0 + \dots + t_k P_k \mid t_i \in \mathbb{K} \forall i \text{ e } t_0 + \dots + t_k = 1\}$$

ottenuta dall'equazione vettoriale ponendo $t_0 = 1 - t_1 - \dots - t_k$

Retta per due punti distinti. $P_0 \neq P_1 \in V \Leftrightarrow \dim A(P_0, P_1) = 1$

$$A(P_0, P_1) = \text{span}(P_1 - P_0) + P_0$$

$$A(P_0, P_1): v = t(P_1 - P_0) + P_0$$

Oss. $P_0, \dots, P_k \in V$ allineati $\Leftrightarrow P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0 \in \mathbb{K}^n$ proporzionali.

Piano per tre punti non allineati. $P_0, P_1, P_2 \in V$ non allineati $\Leftrightarrow$

$P_1 - P_0, P_2 - P_0$ lin. indep. $\Leftrightarrow \dim A(P_0, P_1, P_2) = 2$

$$A(P_0, P_1, P_2): v = t_1(P_1 - P_0) + t_2(P_2 - P_0) + P_0$$

Affinità

Def. $f: V \rightarrow V$ è detta *affinità* se $\exists \varphi: V \rightarrow V$ isomorfismo t.c.

$$f(v) - f(w) = \varphi(v - w), \quad \forall v, w \in V.$$

φ si chiama *parte lineare* di f .

Oss. $f(v) = \varphi(v) + f(0_V)$, $\forall v \in V$, ottenuta ponendo $w = 0_V$.

$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ affinità $\Leftrightarrow \exists G \in GL_n(\mathbb{K})$ e $\exists a \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$f(X) = GX + a, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Oss. $a = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow f$ isomorfismo. $G = I_n \Rightarrow f = t_a$ traslazione.

$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ affinità $\Rightarrow f^{-1}$ affinità ottenuta risolvendo $Y = GX + a$

$$X = G^{-1}Y - G^{-1}a$$

$$f^{-1}(Y) = G^{-1}Y - G^{-1}a.$$

Le affinità mandano sottospazi affini in sottospazi affini della stessa dimensione e preservano la posizione relativa, in particolare il parallelismo.