Elementi di Geometria Euclidea

V spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

Distanza in coordinate. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base *ortonormale* per V.

$$u \text{ di coordinate } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad v \text{ di coordinate } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$d(u,v) = d(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vale anche in $\mathbb{R}^n$ perché la base canonica è ortonormale.

Esempio. In $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare canonico abbiamo

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}.$$

Oss. La formula per la distanza generalizza il Teorema di Pitagora.

Def. Un vettore di norma 1 è detto *versore*.

Def. $u \in V$ è *normale* ad un sottospazio affine $L \subset V$ se $u \in L_0^\perp$ e $u \neq 0_V$, dove $L_0 \subset V$ è la giacitura di L. u è *parallelo* a L se $u \in L_0$.

Oss. u versore normale a L se $u \in L_0^\perp$ e $\|u\| = 1$.

Esempio. Dato il piano $L \subset \mathbb{R}^3$ di equazione

$$L:\ 2x - y - 3z = 1$$

un versore normale è

$$u = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ottenuto normalizzando il vettore dei coefficienti.

Distanza tra sottoinsiemi. La *distanza* tra A e $B \subset V$, $A, B \neq \emptyset$, è

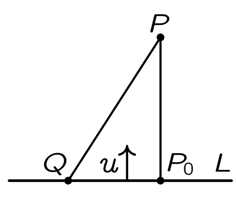
$$d(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Oss. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A,B) = 0$. Vale viceversa se A, B sottospazi affini.

Distanza tra punto e iperpiano affine. In $\mathbb{R}^n$ consideriamo l'iperpiano

$$L:\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$$

e il punto $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo calcolare $d(P, L)$.



Un versore normale a L è $u = \dfrac{A}{\|A\|}$.

Il punto $P_0 \in L$ di minima distanza da P si ottiene come intersezione tra L e la retta ortogonale a L passante per P. Sia $Q \in L \Rightarrow \langle Q, A\rangle + b = 0$.

$$\begin{aligned} d(P, L) = d(P, P_0) &= |\langle P - P_0, u\rangle| = |\langle P - Q + Q - P_0, u\rangle| = \\ &= |\langle P - Q, u\rangle| = \frac{|\langle P, A\rangle - \langle Q, A\rangle|}{\|A\|} = \\ &= \frac{|\langle P, A\rangle + b|}{\|A\|} = \frac{|a_1p_1 + \cdots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $Q - P_0 \in L_0 \Rightarrow \langle Q - P_0, u\rangle = 0$.

Esempio. Calcoliamo in $\mathbb{R}^2$ la distanza tra la retta r e il punto P con

$$r:\ 2x - y + 2 = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad d(P, r) = \frac{|2 - 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Angolo tra due rette in $\mathbb{R}^n$. $r, s \subset \mathbb{R}^n$ rette con *vettori direzionali* risp. v_r, v_s, ossia $r_0 = \operatorname{span}(v_r)$, $s_0 = \operatorname{span}(v_s)$. L'*angolo* tra r e s è

$$\widehat{rs} \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{|\langle v_r, v_s\rangle|}{\|v_r\|\|v_s\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Oss. Il valore assoluto nel numeratore è dovuto al fatto che i vettori direzionali non sono univocamente determinati: se v_r è un vettore direzionale di r, anche $-v_r$ lo è.

Def. r e s sono *perpendicolari* se $\widehat{rs} = \frac{\pi}{2}$.

Angolo tra due iperpiani in $\mathbb{R}^n$. $L, T \subset \mathbb{R}^n$ iperpiani con *vettori normali* risp. u_L, u_T, ossia $L_0^\perp = \operatorname{span}(u_L)$, $T_0^\perp = \operatorname{span}(u_T)$. L'*angolo* tra L e T è

$$\widehat{LT} \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{|\langle u_L, u_T\rangle|}{\|u_L\|\|u_T\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Def. L e T sono *perpendicolari* se $\widehat{LT} = \frac{\pi}{2}$.

Isometrie

V spazio vettoriale Euclideo.

Def. $f : V \to V$ *isometria* se $d(f(u), f(v)) = d(u, v)$, $\forall\, u, v \in V$.

Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono affinità del tipo

$$f(X) = AX + B$$

con $A \in \mathrm{O}(n)$ e $B \in \mathbb{R}^n$. f è detta *isometria diretta* se $A \in \mathrm{SO}(n)$.
Verifichiamo che f è isometria:

$$\begin{aligned} d(f(X), f(Y)) &= \|(AX + B) - (AY + B)\| = \|A(X - Y)\| = \\ &= \sqrt{{}^t(A(X - Y))A(X - Y)} = \sqrt{{}^t(X - Y)\, {}^tAA(X - Y)} = \\ &= \|X - Y\| = d(X, Y). \end{aligned}$$

Se $A = I_n$, $f(X) = X + B$ traslazione $\Rightarrow$ isometria diretta.

Oss.

1) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ isometria;

2) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometrie $\Rightarrow$ $f \circ g$ isometria;

3) f isometria $\Rightarrow$ f^{-1} isometria.

4) isometrie preservano distanze e angoli.

Rotazioni del piano. *Matrice di rotazione di angolo $\theta \in \mathbb{R}$*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

Oss. Si verificano facilmente le seguenti relazioni.
$R_0 = R_{2k\pi} = I_2$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$ (usando formule di addizione per sin e cos).
$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ (usando le due precedenti).
$\det R_\theta = 1$.

Def. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(X) = R_\theta X + B$ è detta *rototraslazione*.

Se $\theta \neq 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(Q) = Q$ (*punto fisso*), soluzione del sistema lineare

$$R_\theta X + B = X \;\Leftrightarrow\; (R_\theta - I_2)X = -B.$$

Ossia una rototraslazione di angolo non nullo è una rotazione attorno a Q (*centro di rotazione*). Infatti se $\theta \neq 2k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$\det(R_\theta - I_2) = 2(1 - \cos\theta) \neq 0$$
$$Q = -(R_\theta - I_2)^{-1}B.$$

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Dati due vettori

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

definiamo il *prodotto vettore* o *prodotto vettoriale* come il determinante

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

È un determinante formale con la base canonica in prima riga. Si ha:

$$X \times Y = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 =$$
$$= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3.$$

Si può dimostrare l'identità seguente, sviluppando i calcoli a primo e secondo membro:

$$\|X \times Y\|^2 = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2$$

$$\|X \times Y\| = \|X\|\|Y\| \sin \widehat{XY}$$

$X \times Y = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow X$ e Y proporzionali.
X, Y linearmente indipendenti $\Rightarrow X \times Y \in \operatorname{span}(X, Y)^\perp$.
Il verso si ricava con la "regola della mano destra": pollice verso X, indice verso Y e medio verso $X \times Y$ (come per i vettori della base canonica).