

# Geometria 3 – Topologia

## IV appello d'esame

Anno accademico 2025-2026

23/6/2026

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.  
Tempo a disposizione: 3 ore.

1) (7 punti) Esiste una retrazione continua di  $\mathbb{R}P^2$  su  $\mathbb{R}P^1$ ?

2) (8 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) (2 punti)  $X$  è connesso per archi?

b) (2 punti) Quante componenti connesse per archi ha  $\mathbb{R}^2 - X$ ?

c) (4 punti) Calcolare  $\pi_1(X)$ .

3) (7 punti) Calcolare  $\pi_1(S^3 \times \mathbb{R}P^3)$ .

4) (8 punti)

a) (2 punti) Dare la definizione di spazio topologico separabile.

b) (6 punti) Dimostrare che ogni spazio topologico compatto metrizzabile è separabile.