

# Geometria 3 – Topologia

## V appello d'esame

Anno accademico 2025-2026

7/7/2026

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.  
Tempo a disposizione: 3 ore.

1) (7 punti) Esiste una retrazione continua di  $\mathbb{R}^2$  su  $S^1$ ?

2) (9 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) (1 punto) Quante componenti connesse per archi ha  $X$ ?

b) (1 punto) Quante componenti connesse per archi ha  $\mathbb{R}^2 - X$ ?

c) (7 punti) Far vedere che  $\mathbb{R}^2 - X$  ha una componente connessa per archi  $U$  non semplicemente connessa e calcolarne il gruppo fondamentale.

3) (7 punti) Calcolare  $\pi_1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^2)$ .

4) (7 punti)

a) (2 punti) Dare la definizione di spazio topologico semplicemente connesso.

b) (5 punti) Dimostrare che  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  è semplicemente connesso per ogni  $n \geq 3$ , mentre non lo è se  $n = 1, 2$ .