

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Geometria 3 Topologia

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2025–2026

Spazi topologici

Def. Dato un insieme X si chiama *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di X l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X

$$\mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subset X\}.$$

Oss. $\mathcal{P}(X) \cong \{0, 1\}^X = \{\text{funzioni } X \rightarrow \{0, 1\}\} \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.$

Leggi di De Morgan. $X - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X - U_\alpha)$

$$X - \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X - U_\alpha).$$

Def. Una *topologia* su X è una famiglia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X che soddisfa:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{T}$
- 2) $X \in \mathcal{T}$
- 3) $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$
- 4) $\forall U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}.$

La coppia $(X, \mathcal{T})$ è detta *spazio topologico*. Gli elementi di X sono detti *punti*. Scriviamo semplicemente X se $\mathcal{T}$ è sottinteso.

Def. $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico.

- $U \subset X$ *aperto* in $X \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}.$
- $C \subset X$ *chiuso* in $X \Leftrightarrow X - C$ aperto $\Leftrightarrow X - C \in \mathcal{T}.$

Oss. Per una topologia $\mathcal{T}$ su X abbiamo:

- 1) $\emptyset$ aperto e chiuso in X
- 2) X aperto e chiuso in X
- 3) unioni arbitrarie di aperti di X sono aperte in X
- 4) intersezioni finite di aperti di X sono aperte in X (per induzione):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}.$$

(3') intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiuse:

$$\forall \{C_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ famiglia di chiusi in } X \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \text{ chiuso in } X$$

(4') unioni finite di chiusi sono chiuse:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall C_1, \dots, C_n \text{ chiusi in } X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n C_i \text{ chiuso in } X.$$

Oss. Per determinare $\mathcal{T}$ è sufficiente dichiarare gli aperti (oppure i chiusi) in modo che siano soddisfatte le proprietà precedenti.

Esempio. I seguenti esempi sono basilari e verranno usati spesso.

- 1) Topologia banale su X : $\mathcal{T}_{\text{ban}} = \{\emptyset, X\} \rightsquigarrow X_{\text{ban}} = (X, \mathcal{T}_{\text{ban}}).$
È la topologia minimale, gli unici aperti sono il vuoto e lo spazio.

- 2) Topologia discreta su X : $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow X_{\text{dis}} = (X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$.
È la topologia massimale, tutti i sottoinsiemi sono aperti e chiusi.
- 3) Topologia cofinita su X : $\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X \mid X - U \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\} \rightsquigarrow X_{\text{cof}} = (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$.
Gli aperti sono i complementari dei sottoinsiemi finiti e il vuoto.
I chiusi sono i sottoinsiemi finiti e X .

Oss.

- 1) X discreto $\Leftrightarrow$ i singoletti dei punti sono aperti.
2) $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{T}_{\text{cof}} \Leftrightarrow X$ finito.

Basi di topologie

Def. Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti di uno spazio topologico X è detta *base* per X se $\forall U \subset X$ aperto, $\exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ t.c. $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono detti *aperti basici*.

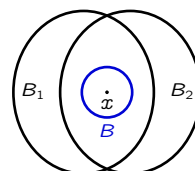
In altre parole $\mathcal{B}$ è base per $X \Leftrightarrow$ gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti e ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Sia $\mathcal{B}$ base per X . $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Esempio. La famiglia dei singoletti $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è base per la topologia discreta.

Teor. Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X . Allora $\exists \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ topologia su X t.c. $\mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$

- 1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.



Inoltre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è unica (topologia generata da $\mathcal{B}$).

Dim. $\Rightarrow$ Segue subito dalla definizione e osservazione precedente.

$\Leftarrow$ Definiamo

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B \in J} B \mid J \subset \mathcal{B} \right\}$$

l'insieme di tutte e sole le unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Mostriamo che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia su X .

- 1) $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \emptyset$
2) $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \mathcal{B}$ in virtù di (1)
3) $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \forall \alpha \in A, \exists J_\alpha \subset \mathcal{B}$ t.c.

$$U_\alpha = \bigcup_{B \in J_\alpha} B \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{B \in J} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \text{ con } J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha \subset \mathcal{B}$$

$$4) \forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}_B, \forall x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in B_1 \subset U_1 \\ \text{e } x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \xRightarrow{(2)} \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c.} \\ x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_B.$$

$\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{T}_B$ ottenuto con $J = \{B\} \Rightarrow \mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_B$.

L'unicità segue subito dalle due osservazioni precedenti. $\square$

Topologie notevoli su $\mathbb{R}$

Topologia Euclidea su $\mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$. Infatti

- 1) L'unione di tutti gli intervalli aperti limitati è $\mathbb{R}$
- 2) L'intersezione di due intervalli aperti limitati è vuota oppure un intervallo aperto limitato ($\in \mathcal{B}$).

Si ha: $U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists a < b$ t.c. $x \in]a, b[\subset U$.

$]a, +\infty[= \bigcup_{b>a}]a, b[,]-\infty, b[$ aperti.

$\{a\}, [a, b], [a, +\infty[,]-\infty, b]$ chiusi (ma esistono molti altri chiusi).

$[a, b[$ e $]a, b]$ non sono né aperti né chiusi in $\mathbb{R}, \forall a < b$.

Retta di Sorgenfrey. $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$ detta *topologia di Sorgenfrey* o *topologia degli intervalli aperti a destra*. Denotiamo con $\mathbb{R}_\ell$ questo spazio topologico (*retta di Sorgenfrey*).

Oss. $]a, b[= \bigcup_{c \in]a, b[} [c, b[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell \Rightarrow$ aperti Euclidei sono aperti in $\mathbb{R}_\ell$ (ma non viceversa). I chiusi Euclidei di $\mathbb{R}$ sono chiusi in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, +\infty[= \bigcup_{c>a} [a, c[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, b]$ chiuso in $\mathbb{R}_\ell$ (perché chiuso in $\mathbb{R}$).

$[a, b[= \mathbb{R}_\ell - (]-\infty, a[\cup [b, +\infty[) \Rightarrow [a, b[$ chiuso (e aperto) in $\mathbb{R}_\ell$.