

Intorni e basi di intorni

Def. X spazio topologico, $J \subset X$ è *intorno* di $x \in X$ se $\exists U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J$.

Oss.

- 1) $\emptyset \neq U \subset X \Rightarrow U$ intorno di ogni suo punto (*intorno aperto*).
- 2) $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists J \subset X$ intorno di x in X t.c. $J \subset U$.

Esempio. $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ intorno di ogni $x \in]-1, 1[$ ma non di ± 1 .
Infatti $1 \in]a, b[\subset [-1, 1]$ è impossibile.

Def. X spazio topologico, $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $x \in X$ è *base* (o *sistema fondamentale*) di intorni di x se $\forall L \subset X$ intorno di x , $\exists J \in \mathcal{J}$ t.c. $J \subset L$.

Oss. Nella definizione possiamo limitarci a L intorno aperto di x .

Esempio. $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{J}_x = \left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ base d'intorni di x .

Def. $J \subset X$ è *intorno* di $A \subset X$ se $\exists U \subset X$ aperto t.c. $A \subset U \subset J$.

Def. $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $A \subset X$ è *base* (o *sistema fondamentale*) di intorni di A se $\forall L \subset X$ intorno di A , $\exists J \in \mathcal{J}$ t.c. $J \subset L$.

Sottospazi topologici

Teor. Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Allora la famiglia

$$\mathcal{T}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \subset X \text{ aperto}\}$$

è una topologia su Y detta *topologia indotta da X* o *topologia relativa* o anche *topologia di sottospazio*.

Dim. Dimostriamo che valgono le proprietà della definizione di topologia.

- 1) $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.
- 2) $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.
- 3) $\forall \{V_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}_Y \exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ aperti di X t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \forall \alpha \in A \Rightarrow$

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$
- 4) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y \exists U_1, U_2$ aperti in X t.c. $V_1 = U_1 \cap Y$ e $V_2 = U_2 \cap Y \Rightarrow$
 $V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y \in \mathcal{T}_Y. \quad \square$

Def. $Y \subset X$ con la topologia relativa è detto *sottospazio topologico*.

Oss.

- 1) Qualunque sottoinsieme di uno spazio topologico è un sottospazio topologico con la topologia relativa.

- 2) Un sottospazio topologico $Y \subset X$ è a sua volta uno spazio topologico.
- 3) $V \subset Y$ aperto in $Y \Leftrightarrow \exists U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap Y$.
- 4) $C \subset Y$ chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists A \subset X$ chiuso in X t.c. $C = A \cap Y$.
- 5) I sottoinsiemi di uno spazio topologico saranno sempre considerati con la topologia relativa, se non specificato diversamente.

Esempi. $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è un importante sottospazio topologico e lo consideriamo con la topologia Euclidea indotta da $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ è un altro esempio interessante.

Prop. $Y \subset X$ sottospazio topologico e $\mathcal{B}$ base per $X \Rightarrow$

$$\mathcal{B}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

base per Y .

Dim. [Esercizio](#) (usare le definizioni di topologia relativa e di base).

Prop. $Y \subset X$ sottospazio, $y \in Y$ e $\mathcal{J}_y$ base di intorni di y in $X \Rightarrow$

$$\mathcal{J}_{Y,y} \stackrel{\text{def}}{=} \{J \cap Y \mid J \in \mathcal{J}_y\}$$

base di intorni di y in Y .

Dim. [Esercizio](#) (usare le definizioni).

Operatori topologici

X spazio topologico, $A \subset X$ sottospazio topologico di X .

Def (Interno). Si chiama *interno* di A in X il sottospazio

$$\text{Int}_X A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto}}} U$$

unione di tutti gli aperti di X contenuti in A .

Oss.

- 1) $\text{Int}_X A$ è il più grande aperto di X contenuto in A .
- 2) $\text{Int}_X A \subset A$ e si ha $\text{Int}_X A = A \Leftrightarrow A$ aperto in X .
- 3) $U \subset A$ e U aperto in $X \Rightarrow U \subset \text{Int}_X A$.
- 4) $x \in \text{Int}_X A \Leftrightarrow \exists U \subset X$ intorno di x t.c. $U \subset A \Leftrightarrow A$ intorno di x .

Esempio. $\text{Int}_{\mathbb{R}}[0, 1[=]0, 1[, \text{Int}_{[0,1]}[0, 1[= [0, 1[, \text{Int}_{\mathbb{R}}\{0\} = \emptyset$
 $\text{Int}_{\mathbb{R}_\ell}[0, 1] = [0, 1[$

Def (Esterno). Si chiama *esterno* di A in X il sottospazio

$$\text{Ext}_X A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int}_X(X - A).$$

Def (Chiusura). Si chiama *chiusura* di A in X il sottospazio

$$\text{Cl}_X A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \text{ chiuso}}} C$$

intersezione di tutti i chiusi di X che contengono A .

Oss. $\text{Cl}_X A$ è il più piccolo chiuso di X che contiene A .

$A \subset \text{Cl}_X A$ e vale $\Leftrightarrow A$ chiuso in X .

$A \subset C$ e C chiuso in $X \Rightarrow \text{Cl}_X A \subset C$.

Prop. $x \in \text{Cl}_X A \Leftrightarrow \forall U \subset X$ intorno (aperto) di x in X si ha $U \cap A \neq \emptyset$.

Dim. Senza perdita di generalità basta considerare U intorno aperto di x .

$\Rightarrow$ Per assurdo, supponiamo $U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset X - U$ chiuso $\Rightarrow \text{Cl}_X A \subset X - U \Rightarrow x \in X - U$ assurdo perché $x \in U$.

$\Leftarrow$ Per assurdo, supponiamo $x \notin \text{Cl}_X A \Rightarrow x \in U := X - \text{Cl}_X A$ aperto $\Rightarrow U \cap A \subset U \cap \text{Cl}_X A = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset$ assurdo. $\square$

Def (Frontiera). Si chiama *frontiera* (o *bordo*) di A in X il sottoinsieme

$$\text{Fr}_X A \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl}_X A \cap \text{Cl}_X (X - A)$$

intersezione delle chiusure di A e del complementare.

Si usa anche la notazione $\text{Fr}_X A = \partial_X A = \partial A$.

Oss. $\text{Fr}_X A$ è chiuso in X e $\text{Fr}_X A \subset \text{Cl}_X A$.

$x \in \text{Fr}_X A \Leftrightarrow \forall U \subset X$ intorno di x in X , si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Teor. Valgono le seguenti uguaglianze:

(1) $\text{Cl}_X A = X - \text{Ext}_X A$

(2) $\text{Fr}_X A = \text{Cl}_X A - \text{Int}_X A$.

Dim. (1) $X - \text{Ext}_X A$ chiuso e $A \subset X - \text{Ext}_X A \Rightarrow \text{Cl}_X A \subset X - \text{Ext}_X A$.

$X - \text{Cl}_X A$ aperto e $X - \text{Cl}_X A \subset X - A \Rightarrow X - \text{Cl}_X A \subset \text{Ext}_X A \Rightarrow \text{Cl}_X A \supset X - \text{Ext}_X A$.

(2) $\text{Fr}_X A = \text{Cl}_X A \cap \text{Cl}_X (X - A) = \text{Cl}_X A \cap (X - \text{Ext}_X (X - A)) = \text{Cl}_X A \cap (X - \text{Int}_X A) = \text{Cl}_X A - \text{Int}_X A$. $\square$