

Unione topologica

Unione disgiunta di insiemi. L'unione disgiunta di due insiemi X e Y è

$$X \sqcup Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Più in generale l'unione disgiunta di una famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i \in I}$ è

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}).$$

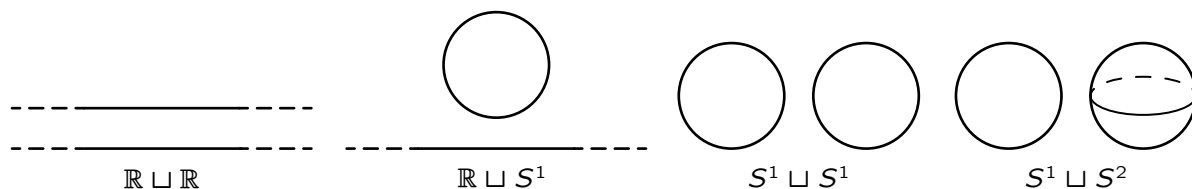
Pertanto l'unione disgiunta di insiemi non necessariamente disgiunti è l'unione di loro copie disgiunte ottenute identificando X_i con $X_i \times \{i\} \forall i \in I$. L'unione disgiunta di insiemi a due a due disgiunti si identifica con l'unione.

Unione topologica di spazi. L'unione topologica di due spazi X e Y è l'unione disgiunta $X \sqcup Y$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_{\sqcup} \stackrel{\text{def}}{=} \{U \sqcup V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$

Oss. $W \subset X \sqcup Y$ aperto $\Leftrightarrow W \cap X$ e $W \cap Y$ aperti.

X e Y sottospazi aperti e chiusi di $X \sqcup Y$.



Def. L'unione topologica di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i \in I}$ è l'unione disgiunta $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_{\sqcup} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{i \in I} U_i \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall i \in I \right\}.$$

Oss. Si verifica facilmente che questa è una topologia.

$W \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i$ aperto $\Leftrightarrow W \cap X_i$ aperto in $X_i \forall i \in I$.

$X_j \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i$ sottospazio aperto e chiuso $\forall j \in I$.

Definiamo le *immersioni canoniche* $\forall j \in I$

$$i_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

$$i_j(x) = x, \quad \forall x \in X_j$$

Oss. i_j immersione aperta e chiusa $\forall j \in I$.

$$i_j^{-1}(W) = W \cap X_j, \quad \forall W \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i.$$

Teor. $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ continua $\Leftrightarrow f_j := f \circ i_j : X_j \rightarrow Y$ continua $\forall j \in I$.

Def. $f_j = f \circ i_j = f|_{X_j} : X_j \rightarrow Y$ è detta *j-esima restrizione* di f .

Oss. Si ha $f(x) = f_j(x), \forall x \in X_j, \forall j \in I$.

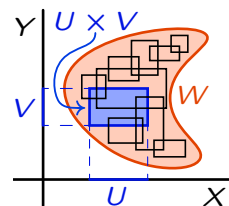
Dim. Basta osservare che $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} f_i^{-1}(V), \forall V \subset Y$ aperto. □

Prodotto topologico

Prodotti topologici finiti. Il *prodotto topologico* di due spazi X e Y è il prodotto cartesiano $X \times Y$ con la *topologia prodotto* avente come base

$$\mathcal{B}_X \stackrel{\text{def}}{=} \{U \times V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$

Gli aperti di $X \times Y$ sono unioni di prodotti di aperti, e in generale sono più complicati dei prodotti di aperti.



In generale, il *prodotto topologico* di $X_1, \dots, X_n$ è il prodotto cartesiano

$$X = X_1 \times \dots \times X_n$$

con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia dei prodotti di aperti

$$\mathcal{B}_X \stackrel{\text{def}}{=} \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Verifichiamo che $\mathcal{B}_X$ è base per una topologia su $X_1 \times \dots \times X_n$.

- (1) $X_1 \times \dots \times X_n \in \mathcal{B}_X$. $\forall U_1 \times \dots \times U_n, V_1 \times \dots \times V_n \in \mathcal{B}_X$ si ha
- (2) $(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (V_1 \times \dots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}_X$.

Proiezioni canoniche. Definiamo le *proiezioni canoniche* $\forall j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \pi_j : X_1 \times \dots \times X_n &\rightarrow X_j \\ \pi_j(x_1, \dots, x_n) &= x_j \end{aligned}$$

Oss. π_j continua, suriettiva e aperta $\forall j = 1, \dots, n$, infatti si ha:

$$\pi_j^{-1}(U_j) = X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_n, \quad \pi_j(U_1 \times \dots \times U_n) = U_j, \quad \forall U_j \subset X_j.$$

Teor. $f : Y \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ continua $\Leftrightarrow f_j := \pi_j \circ f : Y \rightarrow X_j$ continua $\forall j = 1, \dots, n$.

Def. $f_j = \pi_j \circ f : Y \rightarrow X_j$ è detta *j-esima componente* di f .

Oss. Si ha $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ e scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Dim. $\Rightarrow$ f_j è composizione di applicazioni continue quindi è continua.

$\Leftarrow$ $\forall U_1 \times \dots \times U_n \subset X_1 \times \dots \times X_n$ prodotto di aperti (aperto basico) $\Rightarrow$

$$f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(U_n). \quad \square$$

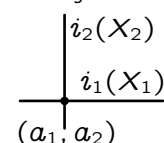
Oss. $A_j \subset X_j$ chiuso $\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$ chiuso. Infatti:

$$(X_1 \times \dots \times X_n) - (A_1 \times \dots \times A_n) = \bigcup_{j=1}^n (X_1 \times \dots \times (X_j - A_j) \times \dots \times X_n).$$

Immersioni canoniche. $\forall j = 1, \dots, n$ scegliamo un punto $a_j \in X_j \rightsquigarrow$

$$i_j : X_j \hookrightarrow X_1 \times \dots \times X_n$$

$$i_j(x_j) = (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$



Oss. $i_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times \{a_{j-1}\} \times X_j \times \{a_{j+1}\} \times \dots \times \{a_n\}$.

Prop. i_j è un'immersione $\forall j = 1, \dots, n$.

Dim. $\pi_j \circ i_j = \text{id}_{X_j}$ e $\pi_i \circ i_j = a_i = \text{cost}$ per $i \neq j \Rightarrow i_j$ continua e iniettiva.
 $i_j(U_j) = (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_n) \cap i_j(X_j) \Rightarrow i_j| : X_j \rightarrow i_j(X_j)$ aperta. $\square$

Oss. $\mathcal{B}_i$ base per X_i , $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \forall i = 1, \dots, n\}$$

base per $X_1 \times \dots \times X_n$.

Teor. $X_1, \dots, X_n$ metrizzabili $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ metrizzabile.

Dim. $d_1, \dots, d_n$ distanze su $X_1, \dots, X_n$ risp. $\rightsquigarrow$

$$d : (X_1 \times \dots \times X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{distanza prodotto})$$

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max(d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)).$$

$$B_d((x_1, \dots, x_n), r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \dots \times B_{d_n}(x_n, r)$$

e la tesi segue dall'osservazione che i prodotti di bocce aperte dello stesso raggio sono base per $X_1 \times \dots \times X_n$. $\square$

Cor. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ e $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{n \text{ volte}}$ sono prodotti topologici.

Dim. Top. prodotto = top. Euclidea perché entrambe indotte da $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Oss. $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua $\Leftrightarrow$ tutte le componenti sono continue.

Def. $T^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ è detto n -toro o toro n -dimensionale.

$I^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{I \times \dots \times I}_{n \text{ volte}}$ è detto ipercubo o cubo n -dimensionale.

$$T^1 = S^1, T^2 = S^1 \times S^1, T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1.$$

$$I^1 = I = [0, 1] \text{ (intervallo)}, I^2 = I \times I \text{ (quadrato)}, I^3 = I \times I \times I \text{ (cubo)}.$$

Oss. $I^n \cong B^n \Rightarrow B^m \times B^n \cong B^{m+n}, \forall m, n \geq 0$.

N.B. $S^m \times S^n \not\cong S^{m+n}$ (lo dimostreremo più avanti per $m \leq 1$).

Prodotti topologici arbitrari

Prodotti arbitrari di insiemi. Dati gli insiemi $X_1, \dots, X_n$, una n -upla

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$$

è essenzialmente una funzione

$$x: \{1, \dots, n\} \rightarrow X_1 \cup \dots \cup X_n$$

$$\text{t.c. } x(i) = x_i \in X_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

e quindi il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le funzioni di questo tipo. Questa considerazione ci permette di generalizzare il prodotto cartesiano.

Def. Data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di insiemi, il *prodotto cartesiano* è l'insieme

$$\prod_{i \in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}.$$

$\forall x \in \prod_{i \in I} X_i, \forall i \in I \rightsquigarrow x_i := x(i)$ (i -esima componente di x).

Scriviamo anche $x = (x_i)_{i \in I}$.

Oss.

$\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ è l'insieme delle *successioni* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\prod_{n \in \mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle successioni a valori in X .

$\prod_{i \in I} X = X^I$ è l'insieme delle funzioni $x: I \rightarrow X$.

Assioma della scelta. $X_i \neq \emptyset \forall i \in I \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Oss. L'assioma dice che $\forall$ insieme I e $\forall$ famiglia di insiemi non vuoti $\{X_i\}_{i \in I} \exists s: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ t.c. $s(i) \in X_i \forall i \in I$ (*funzione di scelta*).

Prodotti topologici arbitrari. Il *prodotto topologico* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i \in I}$ è il prodotto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la *topologia prodotto*

avente per base la famiglia di tutti i prodotti $U = \prod_{i \in I} U_i$ t.c.

$U_i \subset X_i$ aperto $\forall i \in I$ e $\#\{i \in I \mid U_i \subsetneq X_i\} < \infty$

N.B. Se $\#I = \infty$, la base della topologia prodotto non è formata da tutti i prodotti di aperti ma solo dai prodotti di aperti quasi tutti banali, cioè $U_i = X_i$ per ogni $i \in I$ tranne che per al più un numero finito.

N.B. La famiglia di *tutti* i prodotti di aperti è base per la *topologia box* che non studieremo. La topologia box è diversa dalla topologia prodotto nel caso di prodotti infiniti. Le due topologie coincidono per prodotti finiti.

Esempio. In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ gli aperti basici sono i prodotti del tipo $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ con $U_n \subset \mathbb{R}$ aperto $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\exists N > 0$ t.c. $U_n = \mathbb{R} \forall n \geq N$.

Esempio. $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$ è detto *cubo di Hilbert*.

Proiezioni canoniche. Definiamo le *proiezioni canoniche* $\forall j \in I$

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$$

$$\pi_j(x) = x_j$$

Oss. π_j continua, suriettiva e aperta.

Teor. $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ continua $\Leftrightarrow f_j := \pi_j \circ f : Y \rightarrow X_j$ continua $\forall j \in I$.

Def. $f_j = \pi_j \circ f : Y \rightarrow X_j$ è detta *j-esima componente* di f .

Oss. Si ha $f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$ e scriviamo $f = (f_i)_{i \in I}$.

Dim. $\Rightarrow$ f_j è composizione di applicazioni continue quindi è continua.

$\Leftarrow$ $\forall \prod_{i \in I} U_i \subset \prod_{i \in I} X_i$ aperto basico $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ e $\exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ t.c.

$$U_i = X_i, \forall i \in I - \{i_1, \dots, i_n\}$$

$$f^{-1}\left(\prod_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{j=1}^n f_{i_j}^{-1}(U_{i_j}).$$

□