

Spazio quoziente

$\sim$ Relazione d'equivalenza su un insieme X . $\forall x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} x &\sim x && \text{Riflessiva} \\ x &\sim y \Rightarrow y \sim x && \text{Simmetrica} \\ x &\sim y \text{ e } y \sim z \Rightarrow x \sim z && \text{Transitiva} \end{aligned}$$

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y \sim x\} \quad \text{Classe d'equivalenza di } x \in X$$

$$X/\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{[x] \mid x \in X\} \quad \text{Insieme quoziente}$$

$$\pi: X \rightarrow X/\sim \quad \text{Applicazione quoziente}$$

$$\pi(x) = [x]$$

$\sim$ Relazione d'equivalenza su uno spazio topologico X .

Def. La topologia quoziente su $X/\sim$ è

$$\mathcal{T}_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{V \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(V) \subset X \text{ aperto}\}.$$

$X/\sim$ con la topologia quoziente è detto *spazio quoziente*.

Oss.

$$V \subset X/\sim \text{ aperto in } X/\sim \Leftrightarrow \pi^{-1}(V) \text{ aperto in } X.$$

$$C \subset X/\sim \text{ chiuso in } X/\sim \Leftrightarrow \pi^{-1}(C) \text{ chiuso in } X.$$

Oss. $\mathcal{T}_\sim$ è una topologia perché

$$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi^{-1}(X/\sim) = X$$

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(V_i)$$

$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2).$$

Oss. $\pi: X \rightarrow X/\sim$ continua e suriettiva.

N.B. Per definire $\sim$ su X è sufficiente dichiarare equivalenze non banali.

Esempio. Retta con due origini. Su $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0, 1\}_{\text{dis}}$ definiamo

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightsquigarrow R_\div := (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})/\sim.$$

Ogni intorno di $[(0, 0)]$ interseca ogni intorno di $[(0, 1)]$.

Teor. $f: X/\sim \rightarrow Y$ continua $\Leftrightarrow f \circ \pi: X \rightarrow Y$ continua.

Dim. $\Rightarrow$ Immediato.

$$\Leftarrow \quad \forall V \subset Y \text{ aperto} \Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \pi)^{-1}(V) \subset X \text{ aperto} \Rightarrow f^{-1}(V) \subset X/\sim \text{ aperto} \Rightarrow f \text{ continua.} \quad \square$$

Oss. $f: Y \rightarrow X/\sim$ continua se $\exists \tilde{f}: Y \rightarrow X$ continua t.c. $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Spazi proiettivi

Poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$.

$\sim$ relazione di proporzionalità su $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } x = \alpha y$$

$$\mathbb{K}P^n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\})/\sim \quad \mathbb{K}\text{-Spazio proiettivo di dimensione } n. \\ (\text{Retta per } n = 1, \text{ piano per } n = 2)$$

$$[x] = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{K}P^n \quad \text{Coordinate omogenee (non tutte nulle).}$$

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{K}P^n \quad \text{Continua e suriettiva.}$$

$$\pi(x) = [x]$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}P^n \quad \text{Spazio proiettivo reale di dimensione } n.$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{C}P^n \quad \text{Spazio proiettivo complesso di dimensione } n.$$

$$\text{Proiettività. } A \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow P_A : \mathbb{K}P^n \rightarrow \mathbb{K}P^n$$

$$P_A([x]) = [Ax]$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{K}P^n & \xrightarrow{P_A} & \mathbb{K}P^n \end{array} \quad \begin{array}{l} L_A(x) = Ax \\ P_A([x]) = [Ax] \end{array}$$

Oss.

$$1) P_A \circ \pi = \pi \circ L_A \Rightarrow P_A \text{ continua e } P_A^{-1} = P_{A^{-1}} \Rightarrow P_A \text{ omeomorfismo.}$$

$$2) P_A = P_{\alpha A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \forall A \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow$$

$$PGL_{n+1}(\mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{=} GL_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^* \quad \text{Gruppo lineare proiettivo}$$

$$\text{con } \mathbb{K}^* \cong \mathbb{K}^* I_{n+1} = Z(GL_{n+1}(\mathbb{K})) \quad \text{centro di } GL_{n+1}(\mathbb{K})$$

$$\alpha \cong \alpha I_{n+1} \quad (\text{sottogruppo normale})$$