

Teorema di sollevamento dei cammini

Teor. Sia $p: X \rightarrow Y$ rivestimento, $\gamma: I \rightarrow Y$ continua e $\gamma(0) = y_0$.
 $\forall x_0 \in p^{-1}(y_0), \exists! \tilde{\gamma}_{x_0}: I \rightarrow X$ sollevamento di γ t.c. $\tilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0$.

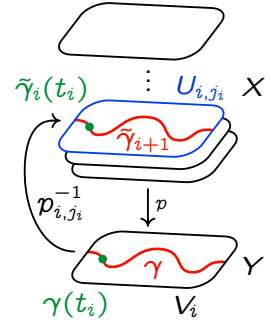
Dim. J fibra di p . $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto banalizzante di $Y \Rightarrow \{\gamma^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $I \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ t.c. $t_{i+1} - t_i < \delta \Rightarrow \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_{\alpha_i} =: V_i$ per un certo $\alpha_i \in A \Rightarrow \gamma(t_i) \in V_{i-1} \cap V_i, i \geq 1$.

$$p^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j \in J} U_{i,j}, \quad p_{i,j} := p|_{U_{i,j}}: U_{i,j} \xrightarrow{\cong} V_i, \quad U_{i,j} \text{ fogli di } p$$

Esistenza Def. ricorsiva: $\tilde{\gamma}_i: [0, t_i] \rightarrow X$ t.c. $\tilde{\gamma}_i(0) = x_0, p \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma|_{[0, t_i]}$.
 $\tilde{\gamma}_0: \{0\} \rightarrow X, \tilde{\gamma}_0(0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{\gamma}_i \Rightarrow \exists! j_i \in J$ t.c. $\tilde{\gamma}_i(t_i) \in U_{i,j_i}$ dato che $\gamma(t_i) \in V_i$.

$$\tilde{\gamma}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{\gamma}_i, & \text{su } [0, t_i] \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma, & \text{su } [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

$p_{i,j_i}(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = p(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = \gamma(t_i) \Rightarrow \tilde{\gamma}_i(t_i) = p_{i,j_i}^{-1}(\gamma(t_i)) \Rightarrow \tilde{\gamma}_{i+1}$ continua. $\tilde{\gamma}_{i+1}$ sollevamento di γ su $[0, t_{i+1}]$ t.c. $\tilde{\gamma}_{i+1}(0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{\gamma}_{x_0} := \tilde{\gamma}_n$.



Unicit  $\forall \tilde{\gamma}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{\gamma}'(0) = x_0$. Per induzione se $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_i$ su $[0, t_i] \Rightarrow \tilde{\gamma}'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{i,j_i}$ perch  $\tilde{\gamma}'([t_i, t_{i+1}])$ connesso $\Rightarrow p_{i,j_i} \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_{x_0}$. $\square$

Oss. γ cappio $\Rightarrow \tilde{\gamma}_{x_0}$ cammino non necessariamente cappio.

Esempio. $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

$$\gamma: I \rightarrow S^1, \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = p(t) \Rightarrow \tilde{\gamma}_0(t) = t.$$

Oss. $\theta: [a, b] \rightarrow S^1 \rightsquigarrow \tilde{\theta}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \theta(t) = (\cos \tilde{\theta}(t), \sin \tilde{\theta}(t)).$

Omotopie di cammini e di cappi

$I^2 = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ quadrato unitario con coordinate $(t, s) \in I^2$.

$$H: I^2 \rightarrow X \text{ continua}$$

$$(t, s) \mapsto H(t, s) =: h_s(t)$$

$$\gamma_0 := h_0, \gamma_1 := h_1$$

Def. $H: I^2 \rightarrow X$   detta omotopia

di cammini $\stackrel{\text{def}}{\iff} H \text{ rel } \{0, 1\}: h_s(0) = x_0, h_s(1) = x_1, \forall s \in I. \gamma_0 \sim \gamma_1.$

di cappi $\stackrel{\text{def}}{\iff} H \text{ rel } \{0, 1\}: h_s(0) = h_s(1) = x_0, \forall s \in I. \gamma_0 \sim \gamma_1.$

libera di cappi $\stackrel{\text{def}}{\iff} h_s$ cappio: $h_s(0) = h_s(1), \forall s \in I.$

Teorema di sollevamento delle omotopie

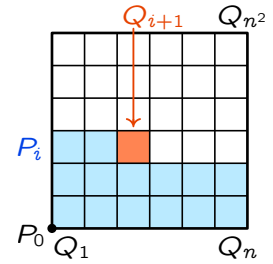
Teor. Sia $p: X \rightarrow Y$ rivestimento, $H: I^2 \rightarrow Y$ continua e $H(0,0) = y_0$.
 $\forall x_0 \in p^{-1}(y_0)$, $\exists! \tilde{H}: I^2 \rightarrow X$ sollevamento di H t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$.
 Inoltre $H \text{ rel } \{0,1\} \Rightarrow \tilde{H} \text{ rel } \{0,1\}$.

Dim. L'idea è simile al caso dei cammini e manteniamo la notazione.
 $\{H^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $I^2 \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue
 $\rightsquigarrow 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_{i+1} - t_i < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$.

Numeriamo i rettangoli $[t_i, t_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ da sinistra a destra e dal basso all'alto $\rightsquigarrow Q_1, \dots, Q_{n^2}$. $\text{diam } Q_i < \delta \Rightarrow H(Q_{i+1}) \subset V_{\alpha_i} =: V_i$.

$$P_0 := \{(0,0)\}$$

$$P_i := \bigcup_{k=1}^i Q_k \Rightarrow T_i := \underbrace{P_i \cap Q_{i+1}}_{\text{connesso}} = \begin{cases} 1 \text{ vertice } (i=0) \\ 1 \text{ lato} \\ 2 \text{ lati consecutivi} \end{cases}$$



Esistenza Def. ricorsiva: $\tilde{H}_i: P_i \rightarrow X$ t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$, $p \circ \tilde{H}_i = H|_{P_i}$.
 $\tilde{H}_0: P_0 \rightarrow X$, $\tilde{H}_0(0,0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{H}_i \Rightarrow \exists! j_i \in J$
 t.c. $\tilde{H}(T_i) \subset U_{i,j_i}$ perché $H(T_i) \subset H(Q_{i+1}) \subset V_i$ e T_i connesso (per archi).

$$\tilde{H}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{H}_i, & \text{su } P_i \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ H, & \text{su } Q_{i+1}. \end{cases}$$

$p_{i,j_i} \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = p \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_i|_{T_i} = (p_{i,j_i}^{-1} \circ H)|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_{i+1}$ continua.
 $\tilde{H}_{i+1}$ sollevamento di H su P_{i+1} t.c. $\tilde{H}_{i+1}(0,0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{H} := \tilde{H}_{n^2}$.

Unicità $\forall \tilde{H}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{H}'(0,0) = x_0$. Per induzione se
 $\tilde{H}' = \tilde{H}_i$ su $P_i \Rightarrow \tilde{H}'(Q_{i+1}) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde{H}'(Q_{i+1})$ connesso $\Rightarrow$
 $p_{i,j_i} \circ \tilde{H}' = H$ su $Q_{i+1} \Rightarrow \tilde{H}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ H = \tilde{H}$ su $Q_{i+1} \Rightarrow \tilde{H}' = \tilde{H}$.

Rel $\{0,1\}$ $H(\{0\} \times I) = y_0 \Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(y_0)$.

$x_0 \in \tilde{H}(\{0\} \times I)$ connesso e $p^{-1}(y_0)$ discreto $\Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) = x_0$.

Analogamente si ha $\tilde{H}(\{1\} \times I) = x_1$, con $p(x_1) = y_1 = H(\{1\} \times I)$. $\square$

Oss. $\alpha \sim \beta: I \rightarrow Y \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0} \sim \tilde{\beta}_{x_0} \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0}(1) = \tilde{\beta}_{x_0}(1)$.