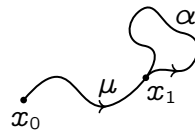


Dipendenza dal punto base

$\mu: I \rightarrow X$ continua con $\mu(0) = x_0$, $\mu(1) = x_1 \rightsquigarrow$

$$\mu_*: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$\mu_*([\alpha]) \stackrel{\text{def}}{=} [\mu * \alpha * \bar{\mu}]$$



Teor. Valgono le proprietà seguenti:

1) μ_* ben definita.

2) $\forall \mu_0 \sim \mu_1 \Rightarrow \mu_{0*} = \mu_{1*}$.

3) $\gamma_{x_0*} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

4) $(\mu * \nu)_* = \mu_* \circ \nu_*$ (se la concatenazione è definita).

5) $(\mu_*)^{-1} = \bar{\mu}_*$.

6) μ_* isomorfismo di gruppi.

Dim. (1)–(3) immediate. (4) $\overline{\mu * \nu} = \bar{\nu} * \bar{\mu}$. (5) $\mu * \bar{\mu} \sim \gamma_{x_0}$ e (2)–(4).

(6) $\mu_*([\alpha][\beta]) = [\mu * \alpha * \beta * \bar{\mu}] = [\mu * \alpha * \bar{\mu} * \mu * \beta * \bar{\mu}] = \mu_*([\alpha]) \mu_*([\beta])$. $\square$

Cor. X connesso per archi, $\forall x_0, x_1 \in X \Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

$\pi_1(X) := \pi_1(X, x_0)$ ben definito a meno di isomorfismi.

N.B. In generale l'isomorfismo $\mu_*: \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$ dipende da μ . $\pi_1(X)$ abeliano $\Rightarrow \mu_*$ indipendente da μ (isomorfismo canonico).

Prop. $\pi_1(X)$ abeliano $\Rightarrow \alpha_* = \beta_*$, $\forall \alpha, \beta: I \rightarrow X$ cammini tra x_0 e x_1 .

Dim. $\gamma := \alpha * \bar{\beta} \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow (\alpha_* \circ \beta_*^{-1})([\omega]) = (\alpha * \bar{\beta})_*([\omega]) = \gamma_*([\omega]) = [\gamma * \omega * \bar{\gamma}] = [\gamma][\omega][\gamma]^{-1} = [\omega] \Rightarrow \alpha_* \circ \beta_*^{-1} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} \Rightarrow \alpha_* = \beta_*$. $\square$

Prop. $X \wr A$, $a \in A \Rightarrow i_*: \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$, con $i: A \hookrightarrow X$ inclusione.

Dim. $H: X \times I \rightarrow X$ deformazione $X \wr A \rightsquigarrow r := h_1|: X \rightarrow A$ retrazione $\Rightarrow i \circ r = h_1 \simeq_A \text{id}_X$ e $r \circ i = \text{id}_A \Rightarrow i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, a)}$ e $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}_{\pi_1(A, a)} \Rightarrow i_*$ isomorfismo e $i_*^{-1} = r_*$. $\square$

Cor. $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $x_0 \in U \Rightarrow \pi_1(U, x_0) = 0$.

Dim. $U \wr \{x_0\}$. $\square$

Oss. $\pi_1(B^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, $\forall n \geq 0$.

Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

Teor. $f: (X, x_0) \xrightarrow{\sim} (Y, y_0)$ equivalenza omotopica $\Rightarrow f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo.

Cor. X contraibile $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$.

Def. X è semplicemente connesso se $\forall x_0, x_1 \in X$, $\exists \alpha: I \rightarrow X$ continua t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ e α unica a meno di $\simeq_{\{0,1\}}$.

Oss. X semplicemente connesso $\Leftrightarrow X$ cpa e $\forall \alpha_0, \alpha_1: I \rightarrow X$ continue t.c. $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = x_0$ e $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = x_1 \Rightarrow \alpha_0 \sim \alpha_1$.

Teor. X semplicemente connesso $\Leftrightarrow X$ connesso per archi e $\pi_1(X) = 0$.

Dim. $\Rightarrow \forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow \alpha \sim \gamma_{x_0} \Rightarrow [\alpha] = 1$.

$\Leftarrow \alpha_0 * \bar{\alpha}_1 \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow [\alpha_0 * \bar{\alpha}_1] = [\gamma_{x_0}] \Rightarrow \alpha_0 * \bar{\alpha}_1 * \alpha_1 \sim \gamma_{x_0} * \alpha_1 \Rightarrow \alpha_0 \sim \alpha_1$. $\square$

Cor. $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow U$ semplicemente connesso.

Oss. B^n e $\mathbb{R}^n$ semplicemente connessi, $\forall n \geq 0$.

Cor. X contraibile $\Rightarrow X$ semplicemente connesso.

Def. Un rivestimento $p: X \rightarrow Y$ è detto *rivestimento universale di Y* se X è semplicemente connesso.

Funzione di sollevamento. $p: X \rightarrow Y$ rivestimento
 $x_0 \in X, y_0 = p(x_0), J = p^{-1}(y_0)$

$$\begin{aligned} \Phi_p: \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow J \\ \Phi_p([\alpha]) &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\alpha}_{x_0}(1) \end{aligned}$$

con $\tilde{\alpha}_{x_0}: I \rightarrow X$ sollevamento di α t.c. $\tilde{\alpha}_{x_0}(0) = x_0$

Teor. $p: X \rightarrow Y$ rivestimento universale $\Rightarrow \Phi_p$ biiettiva.

Def. Φ_p è detta *funzione di sollevamento*.

Dim. **Ben definita** $\alpha \sim \beta \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0} \sim \tilde{\beta}_{x_0}$ (sollevamento dell'omotopia).

Suriettiva $\forall x_1 \in J \rightsquigarrow \gamma: I \rightarrow X$ t.c. $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1 \rightsquigarrow \alpha := p \circ \gamma \in \Omega(Y, y_0)$ e $\tilde{\alpha}_{x_0} = \gamma \Rightarrow \Phi_p([\alpha]) = x_1$.

Iniiettiva $\forall [\alpha], [\beta] \in \pi_1(Y, y_0), \Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]) \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0}(1) = \tilde{\beta}_{x_0}(1) \Rightarrow \tilde{\alpha}_{x_0} \sim \tilde{\beta}_{x_0} \Rightarrow \alpha = p \circ \tilde{\alpha}_{x_0} \sim p \circ \tilde{\beta}_{x_0} = \beta \Rightarrow [\alpha] = [\beta]$. $\square$

Oss. $p: X \rightarrow Y$ rivestimento univers. $[\alpha] = 1 \Leftrightarrow \Phi_p([\alpha]) = \Phi_p(1) = x_0$.

Calcolo di $\pi_1(S^1)$

Teor. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Dim. $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ rivestimento universale
 $y_0 = (1, 0) \in S^1$. $[\alpha] \in \pi_1(S^1, y_0) \rightsquigarrow \tilde{\alpha}_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ unico sollevamento t.c.
 $\tilde{\alpha}_n(0) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_0 + n$ perché p ha periodo 1.

$\Phi_p: \pi_1(S^1, y_0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}, \Phi_p([\alpha]) = \tilde{\alpha}_0(1)$ biiettiva.

$\Phi_p([\alpha][\beta]) = (\alpha * \beta)_0(1) = (\tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)})(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) = \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1) = \Phi_p([\alpha]) + \Phi_p([\beta]) \Rightarrow \Phi_p$ omomorfismo. $\square$

Oss. Il cappio $\omega_n: I \rightarrow S^1, \omega_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$ gira n volte intorno a S^1 e $\tilde{\omega}_{n,0}(t) = nt \Rightarrow \Phi_p([\omega_n]) = \tilde{\omega}_{n,0}(1) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [\omega_1]$ generatore di $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Cor. S^1 non è semplicemente connesso, in particolare non è contraibile.