

POLINOMI TRIGONOMETRICI E LORO COMPLETEZZA

Def.

Un polinomio trigonometrico è una funzione della forma

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} \quad t \in \mathbb{R}$$

dove $c_n \in \mathbb{C} \quad \forall n$.

Sia $T := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

T si può parametrizzare tramite $g(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$. Con un polinomio trigonometrico si può pensare come una funzione su T .

TEOREMA

Sia f una funzione continua su T parametrizzata come funzione periodica di periodo 2π definita su $\mathbb{R}$ e valori in $\mathbb{C}$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ un polinomio trigonometrico P t.c. $\|f - P\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Dim.

Per $k \in \mathbb{N}$, sia

$$Q_k(t) := c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k$$

dove c_k è un coefficiente di

- B2 -

normalizzazione scelto in modo che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1 \quad (a)$$

Si osservi che $Q_k(t)$ è un polinomio trigonometrico. (b)

Inoltre $Q_k(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. (c)

Infine, posto $\gamma_k(\delta) := \sup \{ Q_k(t) \mid \delta \leq |t| \leq \pi \}$, si ha che $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(\delta) = 0 \quad \forall \delta > 0$ (d').

Infatti si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t dt \\ &= \frac{2 c_k}{\pi(k+1)} \end{aligned}$$

Poiché Q_k è decrescente in $[0, \pi]$, segue che, in $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$,

$$Q_k(t) \leq Q_k(\delta) \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k$$

e poiché $1 + \cos \delta < 2$, si ottiene (d').

Definiamo ora

$$P_k(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds \quad k=1,2,\dots$$

Grazie alle proprietà di f e Q_k , si ha

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) Q_k(t-s) ds$$

Poiché Q_k è un polinomio trigonometrico,
anche P_k lo è.

Sia ora $\varepsilon > 0$. Poiché f è uniformemente
continua, $\exists \delta > 0$ t.c. $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$
 $\forall |t - s| < \delta$.

Ora grazie ad (a) si ha

$$P_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) Q_k(s) ds$$

e poiché $Q_k \geq 0$, si ha $\forall t$

$$|P_k(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2 \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon Q_k(s) ds + 2 \|f\|_{\infty} \gamma_k(\delta)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \gamma_k(\delta)$$

$\Rightarrow$

$$\|P_k - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \gamma_k(\delta)$$

$\Rightarrow$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|P_k - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k - f\|_{\infty} = 0.$$



