INTEGRALI SU CURVE

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ una curva regolare. Ricordiamo che ciò significa che γ è di classe C^1 (o C^1 a tratti), con $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$, e γ è iniettiva tranne eventualmente il caso in cui $\gamma(a) = \gamma(b)$ (curva chiusa).

Abbiamo definito le "riparametrizzazioni" di γ ovvero le funzioni $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ di classe C^1 con $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t$, strettamente crescenti o strettamente decrescenti, con cui definire la curva riparametrizzata $\gamma \circ \varphi$. Se $\varphi' > 0$ la riparametrizzazione conserva il verso di percorrenza, se $\varphi' < 0$ la riparametrizzazione lo inverte.

Possiamo considerare equivalenti le curve ottenute una dall'altra tramite una riparametrizzazione che ne conserva il verso.

Indichiamo con $\mathcal{C} = [\gamma] := \{ \tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ curve equivalenti a $\gamma \}$ una classe di equivalenza di curve tutte equivalenti tra loro, e con $-\mathcal{C}$ la corrispondente classe di equivalenza delle curve di $\mathcal{C}$ con verso di percorrenza invertito.

Per una curva γ abbiamo definito la sua lunghezza e abbiamo visto che se γ è regolare si ha

$$\ell(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$$

La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione, per cui ha senso parlare della lunghezza di una classe di equivalenza di curve equivalenti tra loro, $\ell(\mathcal{C})$.

Abbiamo definito la riparametrizzazione con la lunghezza d'arco, ovvero detta

$\sigma(t) := \int_a^t \|\gamma'(p)\| dp$, $\sigma : [a,b] \to [0, \ell(\gamma)]$, e

p $\sigma^{-1} : [0, \ell(\gamma)] \longrightarrow [a,b]$ la sua inversa,

definiamo $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\sigma^{-1}(s))$.

Abbiamo visto che $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1 \quad \forall s$.

INTEGRALI DI LINEA DI PRIMO TIPO

Sia $\mathcal{C}$ una classe di equivalenza di curve equivalenti tra loro. Sia

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione.

Sia $f : \underbrace{\gamma^*}_{=\text{traiettoria di } \gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Definiamo l'integrale di linea di primo tipo

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f(s)\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt}$$

È facile vedere che non dipende dalla particolare parametrizzazione, e che

$$\int_{-\mathcal{C}} f(s)\, ds = \int_{\mathcal{C}} f(s)\, ds .$$

ESEMPI

1) Dato un filo materiale descritto da una curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ con densità lineare $\rho : \gamma^* \to [0, +\infty[$ la massa del filo è

$$m(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \rho(s)\, ds = \int_a^b \rho(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt .$$

Il suo baricentro $C = (x_C, y_C, z_C)$ ha coordinate

$$m(\mathcal{C}) \cdot x_C = \int_{\mathcal{C}} x(s)\, \rho(s)\, ds = \int_a^b \gamma_1(t)\, \rho(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$m(\mathcal{C}) \cdot y_C = \int_{\mathcal{C}} y(s)\, \rho(s)\, ds = \int_a^b \gamma_2(t)\, \rho(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$m(\mathcal{C}) \cdot z_C = \int_{\mathcal{C}} z(s)\, \rho(s)\, ds = \int_a^b \gamma_3(t)\, \rho(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

I momenti d'inerzia rispetto agli assi sono:

$$I_x = \int_{\mathcal{C}} \left(y(s)^2 + z(s)^2\right) \rho(s)\, ds$$

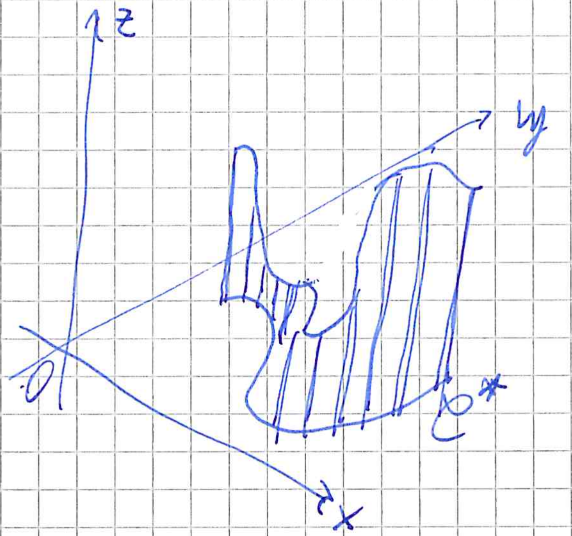
$$I_y = \int_{\mathcal{C}} \left(x(s)^2 + z(s)\right)^2 \rho(s)\, ds$$

$$I_z = \int_{\mathcal{C}} \left(x(s)^2 + y(s)^2\right) \rho(s)\, ds.$$

2) Sia $\mathcal{C}$ una curva piana e

sia $f : \mathcal{C}^* \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$

sia $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathcal{C}^*,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$



allora $\mathrm{Area}(\Sigma) = \int_{\mathcal{C}} f(s)\, ds.$

ESEMPIO

Calcolare il baricentro dell'arco di elica

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad t \in [0, 2\pi], \ \text{con } \rho \equiv 1)$

Si ha

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ da cui

$\|\gamma'(t)\| = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 \quad \Rightarrow m = 4\pi.$

Allora

$$4\pi x_C = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 2\, dt = 2\sin t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$4\pi y_C = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot 2\, dt = -2\cos t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$4\pi z_C = \int_0^{2\pi} t \cdot 2\, dt = t^2 \Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2$$

$$\Rightarrow \quad C = (0, 0, \pi)$$

CAMPI VETTORIALI

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice <u>campo scalare</u> su Ω una funzione $V : \Omega \to \mathbb{R}$ regolare ($C^1, C^2, \dots$).

Si dice campo vettoriale su Ω una funzione $E : \Omega \to \mathbb{R}^n$ regolare ($C^1, C^2, C^3, \dots$), $E = (E_1, \dots, E_n)$

ESEMPI

In $\mathbb{R}^3$ la temperatura è un campo scalare. Altri esempi sono il potenziale elettrico, la pressione, la densità.

Esempi di campo vettoriale sono il campo gravitazionale, il campo elettrostatico, il campo di velocità di un fluido in movimento.

OSS.

Se $V : \Omega \to \mathbb{R}$ è un campo scalare, allora $\nabla V : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

è un campo vettoriale.

<u>Esempi</u>: gradiente di pressione, gradiente di temperatura.

PROBLEMA:

Dato un campo vettoriale $E: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, esiste un campo scalare V t.c. $E = \nabla V$?

ovvero t.c. $E_i = \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, n$?

Si tratta della generalizzazione del problema della primitivazione per funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

In generale la risposta è negativa.

Esempio

in $\mathbb{R}^2$, $E(x,y) = (-y, x)$

Se $\exists$ $V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = x$$

allora

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = -1 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 1$$

contraddicendo il teorema di Schwarz.

DEFINIZIONE

Un campo vettoriale $E: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice CONSERVATIVO $\iff$ $\exists$ $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $E = \nabla V$.

In tale caso, si dice che E è conservativo e V si dice potenziale di E.

Esempio

Il campo gravitazionale in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(-\frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

ammette il potenziale

$$V(x,y,z) = -\frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÈ un campo E sia conservativo

Grazie al teor. di Schwarz,

•) in $\mathbb{R}^2$ se $\vec{E} = (E_1, E_2)$ è conservativo, allora $\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0$

formalmente $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & E_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & E_2 \end{pmatrix} = 0$

o anche $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \wedge (E_1, E_2, 0) = (0,0,0)$

per cui si scrive $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

•) In $\mathbb{R}^3$ se $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$

allora $\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0$,

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0$$

Definendo quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \times (E_1, E_2, E_3)$$

$$= \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, -\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3}\right), \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)$$

Si ha che condizione necessaria affinché $\vec{E}$ sia conservativo è che $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

INTEGRALE DI LINEA DI SECONDA SPECIE

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $E : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale (regolare) e sia $\mathcal{C}$ una curva regolare in Ω.

Definiamo

$$\int_{\mathcal{C}} E(s) \cdot \tau(s) \, ds := \int_a^b E(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

dove $\gamma : [a, b]$ è una parametrizzazione di $\mathcal{C}$, e

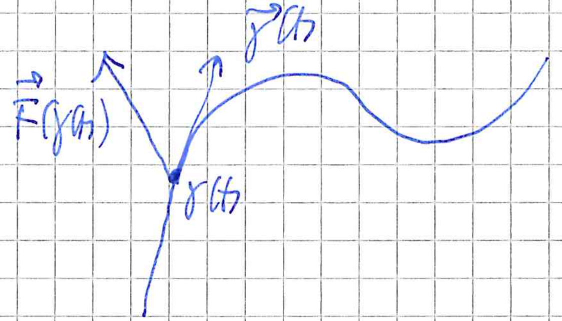
$$\tau(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$ è il vettore unitario tangente a $\mathcal{C}$ in $s = \gamma(t)$

ESEMPIO

Se E è una forza, allora

$$\int_{\mathcal{C}} E(s) \cdot \tau(s)\, ds$$ rappresenta il lavoro

di tale forza su un oggetto che si muove sulla curva $\mathcal{C}$.



In un intervallo di tempo Δt
lo spostamento è $\Delta \vec{r} = \vec{\dot{\gamma}}(t) \Delta t$

e il lavoro è $\vec{F} \cdot \vec{\dot{\gamma}}\, \Delta t$

Così il lavoro è

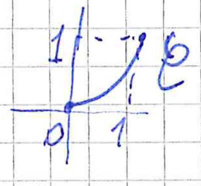
$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\dot{\gamma}}(t)\, dt = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(s) \cdot \vec{\tau}(s)\, ds$$

N.B.

Cambiando parametrizzazione della curva l'integrale di linea non cambia se la riparametrizzazione mantiene il verso di percorrenza, mentre diventa opposto se inverto il verso di percorrenza.

ESEMPIO

Sia $\vec{E}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{E}(x,y) = (y^2, 2xy)$



sia $\gamma(t) = (t, t^2)$ $\quad t \in [0,1]$.

e sia $\mathcal{C}$ la curva (classe di equivalenza) corrispondente (arco di parabola).

allora

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E}(s)\cdot\vec{\tau}(s)\,ds = \int_0^1 ((t^2)^2, 2t\cdot t^2)\cdot(1, 2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 4t^4)\,dt = 5\int_0^1 t^4\,dt = 1.$$

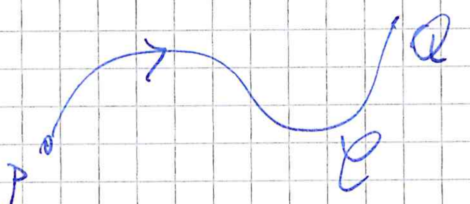
TEOREMA

Sia $E : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo con potenziale V.

Sia $\mathcal{C}$ una curva regolare in Ω e sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una sua parametrizzazione.

Indichiamo con $P = \gamma(a)$, $Q = \gamma(b)$.

Allora $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} E(s)\cdot\tau(s)\,ds = V(Q) - V(P)$.



Dim.

$$\int_a^b E(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \nabla V(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

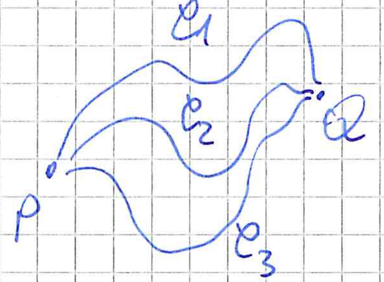
$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(\gamma(t))\,dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) =$$

$$= V(Q) - V(P) \quad \boxtimes$$

In particolare quindi

$$\int_{\mathcal{C}} E(s)\cdot\tau(s)\,ds$$ dipende solo dal

punto iniziale e dal punto finale di $\mathcal{C}$



$$\int_{\mathcal{C}_1} E(s)\cdot\tau(s)\,ds = \int_{\mathcal{C}_2} E(s)\cdot\tau(s)\,ds = \int_{\mathcal{C}_3} E(s)\cdot\tau(s)\,ds.$$

In particolare se $\mathcal{C}$ è una curva chiusa,

$$\oint_{\mathcal{C}} E(s)\cdot\tau(s)\,ds = 0.$$

Vediamo ora che vale il viceversa. Se $E:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale tale che

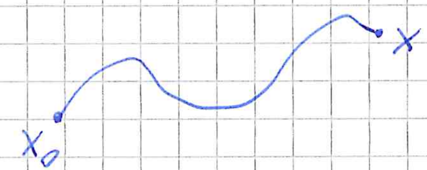
$$\oint_{\mathcal{C}} E(s)\cdot\tau(s)\,ds=0 \qquad \forall \text{ curve regolari chiuse,}$$

allora E è conservativo, ovvero ammette un potenziale.

Si fa così. Fissiamo $x_0\in\Omega$

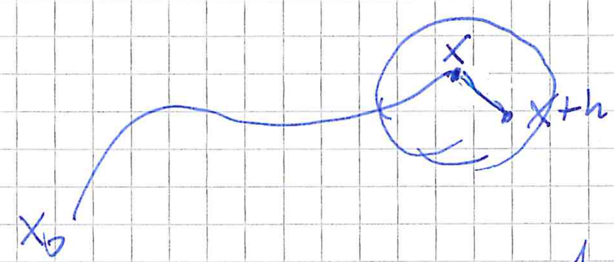
e definiamo
$$V(x):=\int_{\mathcal{C}(x_0,x)} E(s)\cdot\tau(s)\,ds$$

dove $\mathcal{C}(x_0,x)$ è una qualunque curva che unisce x_0 e x



La definizione non è ambigua perché l'integrale non dipende dalla particolare curva.

Ora se $h\in\mathbb{R}^n$ è piccolo,



Si ha
$$V(x+h)-V(x)=\int_0^1 E(x+th)\cdot h\,dt$$

(ho scelto di spostarmi da x a $x+h$ in linea retta, $\gamma(t)=x+th$, $t\in[0,1]$

Allora

$$\frac{V(x+h)-V(x)-E(x)\cdot h}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\int_0^1 [E(x+th)-E(x)]\cdot h \, dt$$

$\Longrightarrow$

$$\left|\frac{V(x+h)-V(x)-E(x)\cdot h}{\|h\|}\right| \leq \frac{1}{\cancel{\|h\|}}\int_0^1 \|E(x+th)-E(x)\| \, \cancel{\|h\|} \, dt \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

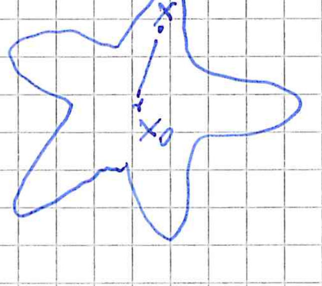
Quindi $\nabla V(x) = E(x)$. ☒

Abbiamo visto che una condizione "locale" necessaria affinché E sia conservativo è che $\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j$

Ci chiediamo se tale condizione sia anche sufficiente. La risposta in generale è no, e dipende dalla geometria di Ω.

Def.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice "stellato" rispetto a un suo punto $x_0 \Longleftrightarrow \forall x \in \Omega$, il segmento che unisce x_0 e x è tutto contenuto in Ω



(Oss.: Un convesso è stellato rispetto a ogni suo punto).

TEOREMA DI POINCARÉ

Sia Ω stellato rispetto a x_0. Sia $E: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale t.c.

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j.$$

Allora $\exists\, V: \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla V = E$

Dim.

$\forall x \in \Omega$ sia $\gamma_x : [0,1]$ $\gamma_x(t) = x_0 + t(x - x_0)$

e sia

$$V(x) := \int_{\gamma_x} E(s) \cdot \tau(s)\, ds = \int_0^1 E(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n E_i(x_0 + t(x-x_0))(x_i - x_{0i})\, dt$$

Si ha

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_j} = \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(x_0 + t(x-x_0))\, t(x_i - x_{0i}) + E_j(x_0 + t(x-x_0)) \Big] dt$$

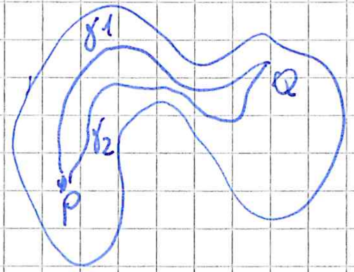
$$= \int_0^1 t \sum_{i=1}^n \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(x_0 + t(x-x_0))(x_i - x_{0i}) + E_j(x_0 + t(x-x_0)) \Big] dt$$

$$= \int_0^t \Big[t \frac{d}{dt} E_j(x_0 + t(x-x_0)) + E_j(x_0 + t(x-x_0)) \Big] dt =$$

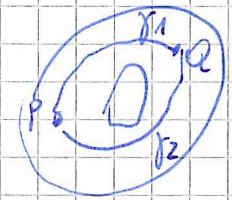
$$= t E_j (x_0 + t(x - x_0)) \Big|_0^1 = E_j(x) \qquad \blacksquare$$

<u>OSS.</u>

Il teorema vale in domini più generali, i cosiddetti <u>domini semplicemente connessi</u> (sono i domini in cui date due curve che congiungono P e Q posso deformare una fino a trasformarla nell'altra, senza uscire da Ω



semplicemente connesso



non semplicemente connesso.

<u>ESEMPIO</u> di un campo con $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ ma non conservativo (globalmente).

$$\vec{B} := \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, ma

$$\oint_{\{x^2+y^2=1\}} \vec{B}(s) \cdot \vec{\tau}(s)\, ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

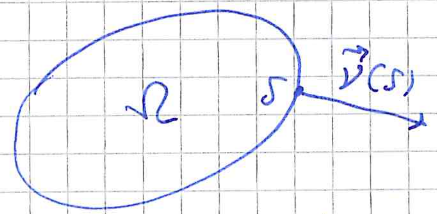
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0 .$$

Quindi $\vec{B}$ non può essere conservativo su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso con frontiera regolare $\partial\Omega$, e sia $\vec{\nu}(s) = (\nu_1(s), \nu_2(s))$ il vettore normale a $\partial\Omega$ in $s \in \partial\Omega$, che punta verso l'esterno.



sia $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ regolare

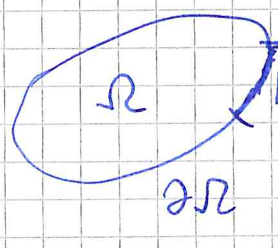
Allora

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f(s)\,\nu_2(s)\,ds \quad (1)$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f(s)\,\nu_1(s)\,ds \quad (2)$$

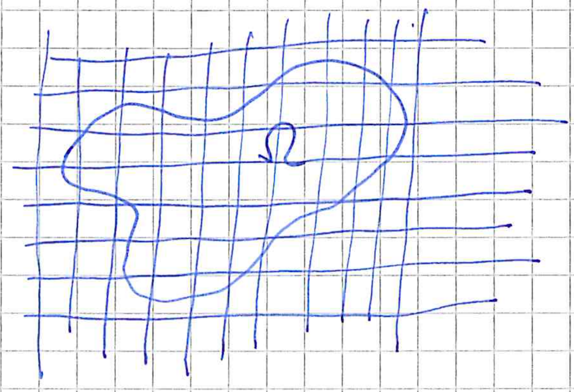
dove per una parametrizzazione $\gamma(t)$ di un pezzo Γ di $\partial\Omega$ si è definito

$$\int_\Gamma \rho(s)\,ds \overset{def.}{=} \int_{t_1}^{t_2} \rho(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$



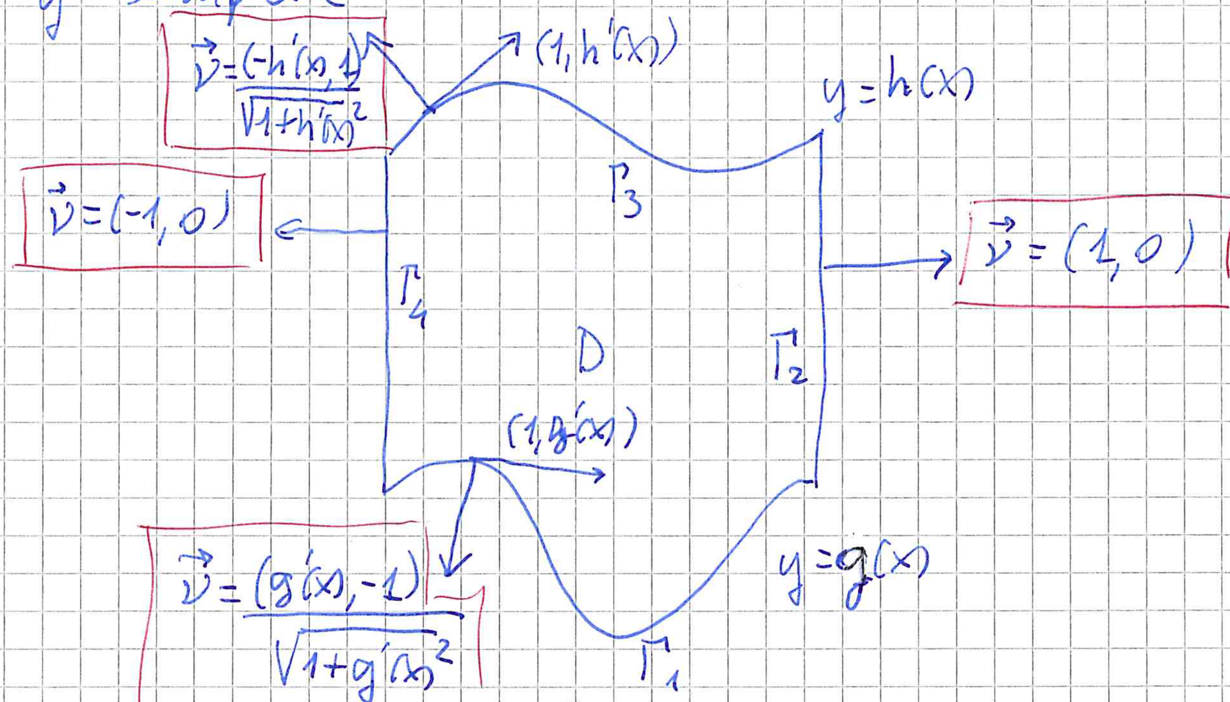
$\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$

Dimostreremo prima (1) e (2) per un dominio D y-semplice (per simmetria quindi saranno vere anche per un dominio x-semplice). Il caso generale si ottiene quindi "incollando" i risultati "locali".



Ω è decomponibile in insiemi x-semplici o y-semplici.

Consideriamo quindi un dominio y-semplice



$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

Osservazione preliminare.

Sia $\varphi(x,y)$ una funzione regolare,
e sia

$$G(x,\alpha,\beta) := \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x,y)\,dy$$

allora

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\,dy$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x,\alpha,\beta) = -\varphi(x,\alpha)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta}(x,\alpha,\beta) = \varphi(x,\beta)$$

da cui, se $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono regolari,

$$\frac{d}{dx} G(x,\alpha(x),\beta(x)) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\,dy + \varphi(x,\beta(x))\,\beta'(x) - \varphi(x,\alpha(x))\,\alpha'(x).$$

Ora possiamo dimostrare (1)

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \big(f(x,h(x)) - f(x,g(x)) \big)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x, h(x)) \frac{1}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \sqrt{1+h'(x)^2}\, dx +$$

$$+ \int_a^b f(x, g(x)) \frac{-1}{\sqrt{1+g'(x)^2}} \sqrt{1+g'(x)^2}\, dx$$

$$= \int_{\Gamma_3} f(s)\, \nu_2(s)\, ds \quad + \int_{\Gamma_1} f(s)\, \nu_2(s)\, ds$$

$$+ \underbrace{\int_{\Gamma_2} f(s)\, \nu_2(s)\, ds}_{=0} \quad + \underbrace{\int_{\Gamma_4} f(s)\, \nu_2(s)\, ds}_{=0}$$

$$= \int_{\partial D} f(s)\, \nu_2(s)\, ds.$$

Ora calcoliamo (2)

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy - f(x, h(x))\, h'(x) + f(x, g(x))\, g'(x) \right) dx$$

$$= \int_{g(b)}^{h(b)} f(b,y)\, dy - \int_{g(a)}^{h(a)} f(a,y)\, dy$$

$$+ \int_a^b f(x, h(x)) \frac{-h'(x)}{\sqrt{1+h'^2(x)}} \sqrt{1+h'(x)^2}\, dx$$

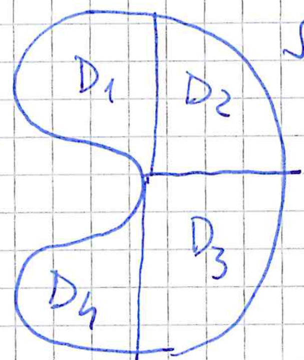
$$+ \int_a^b f(x, g(x)) \frac{g'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \sqrt{1+h'(x)^2}\, dx$$

$$= \int_{\Gamma_2} f(s)\,\nu_1(s)\,ds + \int_{\Gamma_4} f(s)\,\nu_1(s)\,ds +$$

$$+ \int_{\Gamma_3} f(s)\,\nu_1(s)\,ds + \int_{\Gamma_1} f(s)\,\nu_1(s)\,ds$$

$$= \int_{\partial D} f(s)\,\nu_1(s)\,ds.$$

In un dominio generale Ω, faccio una scomposizione

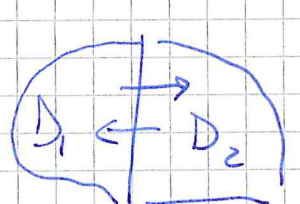


$\Omega = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

D_1 e D_4 sono x semplici

D_2 e D_3 sono y semplici

nelle linee di contatto i contributi si elidono



il flusso uscente da D_1 si elide con quello uscente da D_2 attraverso la linea di contatto.

In conclusione, si ha

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f(s)\, \nu_1(s)\, ds$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f(s)\, \nu_2(s)\, ds$$

$\blacksquare$

CONSEGUENZA **Teorema della divergenza**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, sia $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale regolare, $\vec{F} = (F_1, F_2)$

Allora

$$\boxed{\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, (x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(s) \cdot \nu(s)\, ds}$$

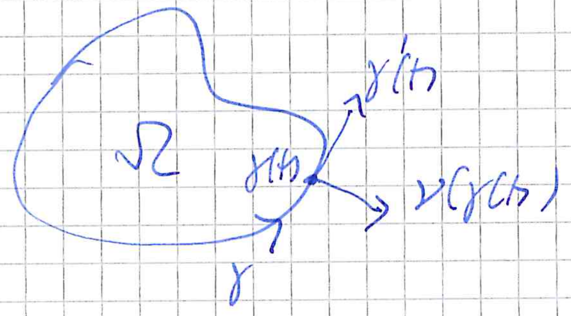
dove $\operatorname{div} \vec{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$

(si usa anche la notazione $\nabla \cdot \vec{F}$).

$\blacksquare$

TEOREMA DI STOKES NEL PIANO

Sia $\vec{F} = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale su un aperto Ω che ha come frontiera una curva γ, che orientiamo in senso antiorario $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$



Osserviamo che

$$\vec{\nu}(\gamma(t)) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}}$$

Applicando (1) e (2) si ha:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_0^1 F_2(\gamma(t)) \frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}} \sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}\, dt$$

$$+ \int_0^1 -F_1(\gamma(t)) \frac{-\gamma_1'(t)}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}\, dt$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} \vec{F}(s) \cdot \vec{\tau}(s)\, ds$$

dove $\vec{\tau}(s)$ è il vettore tangente* a $\partial\Omega$ in s

(* unitario)

Si scrive anche

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} \times \vec{F} \, dx\,dy = \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

$\vec{\nabla} \times \vec{F}$ = "rotore di F"

in $\mathbb{R}^2$ $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ è uno scalare

Vedremo che in $\mathbb{R}^3$ $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ è un vettore.

in $\mathbb{R}^2$ possiamo pensare $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ come un vettore ortogonale a $\mathbb{R}^2$ pensato come immerso in $\mathbb{R}^3$