

**ESERCIZI SU SISTEMI DI GENERATORI E
INDIPENDENZA LINEARE
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25**

Esercizio 1

Considera i seguenti due vettori in $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dimostra che il vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di v_1 e v_2 determinando $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$.

Considera poi i vettori

$$v'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v'_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dimostra che il vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di v'_1 e v'_2 determinando $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $v_3 = a \cdot v'_1 + b \cdot v'_2$.

Risoluzione. Vale che $v_3 = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b \\ -2a + 2b \end{pmatrix}$$

Devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} a + 3b &= 1 \\ -2a + 2b &= 1 \end{cases}$$

Usiamo la gradinizzazione di Gauss per risolvere il sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è dunque equivalente a quello con matrice completa data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi la soluzione

$$a = -\frac{1}{8} \quad b = \frac{3}{8}$$

Abbiamo pertanto che $v_3 = (-1/8)v_1 + (3/8)v_2$.

Nel secondo caso, analogamente al primo abbiamo che $v_3 = a \cdot v'_1 + b \cdot v'_2$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - 5b \\ 3a + 4b \end{pmatrix}$$

Devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -a - 5b &= 1 \\ 3a + 4b &= 1 \end{cases}$$

Usiamo la gradinizzazione di Gauss per risolvere il sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è dunque equivalente a quello con matrice completa data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi la soluzione

$$a = \frac{9}{11} \quad b = -\frac{4}{11}$$

Abbiamo pertanto che $v_3 = (9/11)v_1 + (-4/11)v_2$.

Esercizio 2

Sia $U \subseteq \mathbb{Q}^3$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 3x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Determina un sistema di generatori per U .

Sia $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid \begin{cases} 3x - y + 2z &= 0 \\ 2y + z - w &= 0 \end{cases} \right\}.$$

Determina un sistema di generatori per U .

Risoluzione. Consideriamo

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \mid 3x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Notiamo quindi che se un elemento di U soddisfa $3x - y + 2z = 0$ allora vale che $y = 3x + 2z$. Pertanto, ogni elemento di U è della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ 3x + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori per U .

Consideriamo ora

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \mid \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2y + z - w = 0 \end{cases} \right\}.$$

Notiamo che la matrice completa del sistema lineare che descrive gli elementi di U è a scala:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che per gli elementi di U vale che

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}w \\ y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w \end{cases}$$

Pertanto essi sono della forma

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{6}z + \frac{1}{6}w \\ -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6}w \\ \frac{1}{2}w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi che i vettori

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori per U .

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K . Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e sia v una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. **Dimostra** che

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n, v).$$

Risoluzione. Per ipotesi abbiamo che esistono $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ tali per cui

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n.$$

Dimostriamo l'uguaglianza dei due insiemi tramite doppia inclusione.

“ $\subseteq$ ” Sia $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, mostriamo che $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n, v)$. Per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Allora possiamo scrivere

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0 \cdot v,$$

da cui segue che $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n, v)$.

“ $\supseteq$ ” Sia $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n, v)$, mostriamo che $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$. Per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$ tali che $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v$. Ricordando che $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} w &= (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) \\ &= (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n. \end{aligned}$$

Quindi $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$.

Esercizio 4

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K . **Dimostra** che

- (1) se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale e $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori per U , allora per ogni $u \in U$, anche $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per U ;
- (2) se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora per ogni $m \leq n$ anche $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Risoluzione.

- (1) Sia $u \in U$. Per ipotesi $U = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ e quindi u è combinazione lineare di $u_1, \dots, u_n$. Per l'esercizio precedente $\text{span}(u_1, \dots, u_n) = \text{span}(u_1, \dots, u_n, u)$ e pertanto $U = \text{span}(u_1, \dots, u_n, u)$, quindi $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per U .
- (2) Sia $m \leq n$ e supponiamo che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0.$$

Dobbiamo dimostrare che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli. Possiamo scrivere

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0.$$

Dal momento che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora tutti i coefficienti della precedente combinazione lineare devono essere nulli, e quindi

$$\lambda_1 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_m = 0.$$

Pertanto $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ una matrice a scala, dove K è un campo. Supponi che A sia diversa dalla matrice nulla. Siano $A_{(1)}, \dots, A_{(m)}$ le righe di A : esse sono dunque vettori in K^n . Siano $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ le righe non-nulle di A , per un certo $r \leq m$ con $r > 0$. **Dimostra** che $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ sono linearmente indipendenti.

Risoluzione. Per ipotesi, la matrice A ha la forma seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2,j_2} & * & * & * & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{r,j_r} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

dove gli elementi a_{i,j_i} sono non nulli per $i \in \{1, \dots, r\}$ ed $r > 0$. Formiamo una combinazione lineare delle prime r righe

$$\lambda_1 A_{(1)} + \dots + \lambda_r A_{(r)}$$

e supponiamo che essa sia il vettore nullo. La componente di posto j_1 di tale combinazione lineare è uguale a $\lambda_1 a_{1,j_1}$. Dato che $a_{i,j_1} \neq 0$, otteniamo che $\lambda_1 = 0$. A questo punto, la componente di posto j_2 di tale combinazione lineare è $\lambda_2 a_{2,j_2}$, da cui otteniamo che $\lambda_2 = 0$. Procedendo così dimostriamo che tutti i λ_i per $i \in \{1, \dots, r\}$ sono nulli e pertanto $A_{(1)}, \dots, A_{(r)}$ sono linearmente indipendenti.