PRELIMINARI

Def G un insieme con un'operazione binaria $\cdot$ in G. G è un gruppo se valgono le seguenti condizioni:

i) per ogni $x, y, z \in G$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

ii) esiste $1 \in G$ tale che $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ per ogni $x \in G$ (elemento neutro)

iii) per ogni $x \in G$ esiste $x^{-1} \in G$ tale che $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_G$ (elemento inverso)

[di solito $\cdot$ si omette]

Def Un gruppo G si dice abeliano se per ogni $x, y \in G$ $xy = yx$

Esempi:
- $\mathbb{Q}$ con $+$
- $GL(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{matrici } n \times n \text{ con entrate} \\ \text{reali e } \det \neq 0 \end{array} \right\}$ con il prodotto di matrici
- Isometrie di $\mathbb{R}^3$ con la composizione di applicazioni: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$

Esercizi: Sia G gruppo:

Verificare che:
- l'elemento neutro è unico in G
- per ogni $g \in G$ esiste un'unico el. inverso
- $(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$

Def H sottoinsieme di G gruppo
H si dice sottogruppo di G se

i) $1_G \in H$

ii) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$

iii) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Oss: H con l'operazione indotta da G è un gruppo

Esercizio:

Considero le seguenti condizioni:

iv) $H \neq \emptyset$

v) $x, y \in H \Rightarrow x y^{-1} \in H$

Dimostrare che il verificarsi contemporaneo di i) ii) e iii) è equivalente al verificarsi cont. di ii) iii) e iv) ed è equivalente al verificarsi cont. di iv) e v)

Def: Indico H sottogruppo di G con $H \leq G$
(relazione d'ordine "essere sottogruppo")

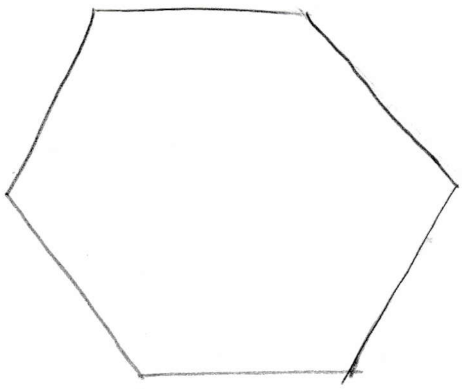
Esempi: • $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \leq GL(n,\mathbb{R})$

• $\{$traslazioni di $\mathbb{R}^3\} \leq Isom(\mathbb{R}^3)$

• gruppi diedrali

P_n poligono regolare con n lati in $\mathbb{R}^2$

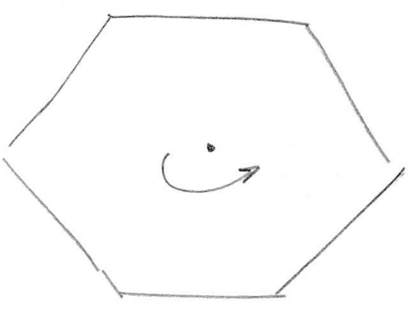
P_6 (esagono regolare)



$\mathbb{D}_{2n} = \{\phi \in Isom(\mathbb{R}^2)$ tale che $\phi(P_n) = P_n\}$

gruppo delle simmetrie del poligono con n lati

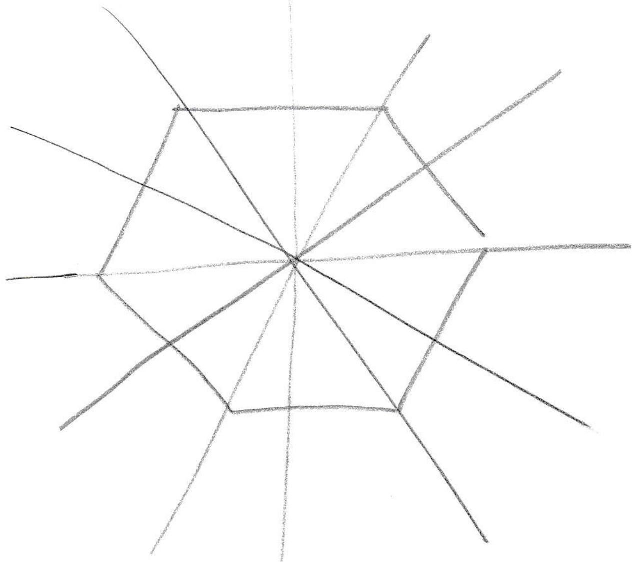
$\boxed{\mathbb{D}_{2n} \text{ ha } 2n \text{ elementi}}$



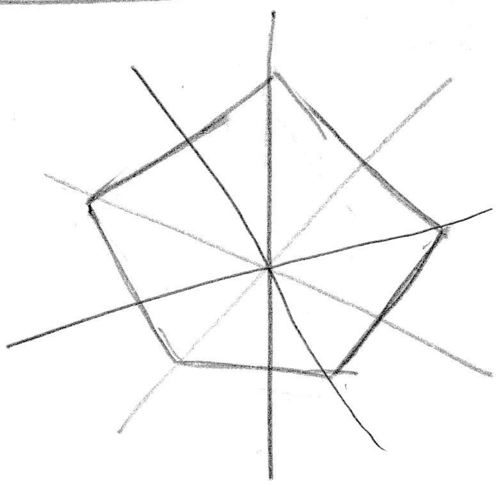
n rotazioni con centro di rotazione l'intersezione delle diagonali e angoli $k\frac{2\pi}{n}$

con $k = 0, \dots, n-1$

[compresa $Id_{\mathbb{R}^2}$]



oppure



<u>n riflessioni</u>

assi delle riflessioni

sottogruppi : $\{\text{rotazioni}\} \leq \mathbb{D}_{2n}$

se n' divide n $\quad \mathbb{D}_{2n'} \leq \mathbb{D}_{2n}$

<u>Oss</u> : $\mathbb{D}_{2n}$ non è abeliano $(n \geq 3)$

<u>Oss</u> : G gruppo

1) $\{1_G\} \leq G$ $\quad$ 2) $G \leq G$

3) se $H \leq G$ e $K \leq G$ allora $H \leq G$

4) se $H \leq G$ e $K \leq G$ allora $H \cap K \leq G$

<u>Dim</u> per esercizio

<u>Def</u> :
- $\{1_G\}$ sottogruppo banale
- $H \leq G$ è detto proprio se $H \neq G$

SISTEMI DI GENERATORI PER SOTTOGRUPPI

Def $S \subseteq G$ S sottoinsieme $\neq \phi$

Definiamo

$$<S> \overset{def}{=} \{u_1 u_2 \ldots u_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_i \text{ o } u_i^{-1} \in S\}$$

Prop $<S>$ è un sottogruppo di G contenente S

Dim con la definizione (i)+ii)+iii))

i) $S \neq \phi \Rightarrow \exists u \in S \Rightarrow u u^{-1} = 1 \in S$

[vi ricordo che $(u^{-1})^{-1} = u$]

ii) $x, y \in <S> \Rightarrow x = u_1 \ldots u_n$ $y = v_1 \ldots v_m$

$\Rightarrow xy = (u_1 \ldots u_n)(v_1 \ldots v_m) =$

$= u_1 \ldots u_n v_1 \ldots v_m \in S$

proprietà associativa

iii) $x \in <S> \Rightarrow x = u_1 \ldots u_n$

$\Rightarrow x^{-1} = u_n^{-1} \ldots u_1^{-1}$ [provare]

$\Rightarrow x^{-1} \in <S>$

[se $u_i \in S \Rightarrow (u_i^{-1})^{-1} \in S$ e se $u_i^{-1} \in S \Rightarrow u_i^{-1} \in S$]

■

Oss:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H$$

Dim "$\supseteq$" $\langle S \rangle$ è un sottogruppo di G che contiene S

$$\langle S \rangle \supseteq \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H$$

[$\langle S \rangle$ è uno degli insiemi che stiamo intersecando]

"$\subseteq$"

$x \in \langle S \rangle$

$\Rightarrow x = u_1 \dots u_n$ con $u_i \in S$ o $u_i^{-1} \in S$

Sia $H \leq G$ t.c $S \subseteq H$

se $u_i \in S$ allora $u_i \in H$

se $u_i^{-1} \in S \Rightarrow u_i^{-1} \in H \Rightarrow (u_i^{-1})^{-1} = u_i \in H$

otteniamo $u_i \in H \ \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow u_1 \dots u_n \in H$

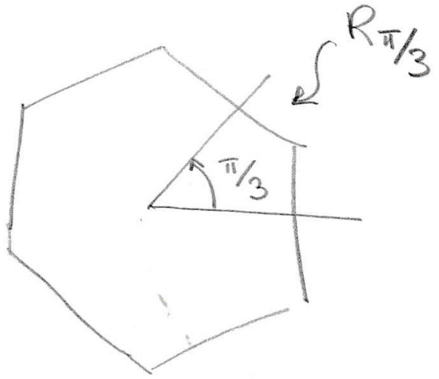
Siccome H è un generico s.gr. contenente S

$$\langle S \rangle \subseteq \bigcap_{\substack{S \subseteq H \\ H \leq G}} H$$

Oss $\langle S \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G contenente S (i.e. $H \leq G$ e $H \supseteq S \Rightarrow H \supseteq \langle S \rangle$)

Def $\langle S \rangle$ si dice sottogruppo generato da S

Esempi 1) $\mathbb{D}_{12}$ simmetrie dell'esagono



R_α rotazione di angolo α

$$\{\text{rotazioni in } \mathbb{D}_{12}\} \subseteq \mathbb{D}_{12}$$

$$\| $$

$$\{Id, R_{\pi/3}, R_{2\pi/3}, R_\pi, R_{4/3\pi}, R_{5/3\pi}\} = \langle R_{\pi/3} \rangle$$

[se unico elemento ometto $\{\}$]

Il sottogruppo delle rotazioni di $\mathbb{D}_{12}$ è generato da $R_{\pi/3}$

2) In generale se $g \in G$

$$\langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad [\text{con } g^0 = 1_G]$$

[Attenzione: non tutte le potenze sono distinte]

<u>Def</u> Se un gruppo G viene generato da un solo elemento g (cioè $G = \langle g \rangle$)

G viene detto <u>ciclico</u> e g <u>generatore</u>

CENTRALIZZANTE E NORMALIZZANTE

<u>Def</u> G gruppo, $S \subseteq G$ sottoinsieme

$$C_G(S) \overset{def}{=} \{ x \in G \mid xs = sx \ \forall s \in S \}$$

viene detto <u>centralizzante</u> di S in G

<u>Proposizione</u> $C_G(S) \leq G$

<u>Dim.</u>

i) $s \cdot 1 = 1 \cdot s = s \quad \forall s \in S \Rightarrow 1 \in C_G(S)$

ii) $x, y \in S$ e $s \in S$

$$(xy)s = x(ys) = x(sy) = (xs)y$$

$$= (sx)y = s(xy)$$

iii) $x \in C_G(S)$ e $s \in S$

$$\Rightarrow xs = sx \Rightarrow x^{-1}(xs)x^{-1} = x^{-1}(sx)x^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x^{-1}x)}_{1}(sx^{-1}) = (x^{-1}s)\underbrace{(xx^{-1})}_{1}$$

$$\Rightarrow sx^{-1} = x^{-1}s$$

per arbitrarietà di s $x^{-1} \in C_G(S)$ $\blacksquare$

<u>Def</u> $Z(G) \overset{def}{=} C_G(G) = \{x \in G \mid xg = gx = 1\}$
viene detto il centro di G

<u>Def</u> - siano $x, g \in G$ $x^g \overset{def}{=} g^{-1}xg$
viene detto il <u>coniugato</u> di x rispetto a g

- siano $g \in G$ e $S \subseteq G$

$$S^g \overset{def}{=} g^{-1}Sg = \{g^{-1}sg \mid g \in G\}$$

viene dello il <u>coniugato</u> di S rispetto a g

<u>Def</u> $N_G(S) \overset{def}{=} \{g \in G \mid S^g = S\}$
viene detto il normalizzante di S in G

<u>Esercizio</u> 1) $N_G(S) \leq G$

2) se G è finito
$N_G(S) = \{g \in G \mid gsg^{-1} \in S \ \forall s \in S\}$