Prova scritta di Complementi di Algebra
21 giugno 2016

Esercizio 1.

1. Sia G un gruppo di ordine pq con p e q primi distinti. Si dimostri che se $p < q$, esiste un sottogruppo normale di G di ordine q.
2. Sia G un gruppo di ordine pq con p e q numeri primi tali che $p < q$. Se q non è congruo a 1 modulo p allora G è ciclico.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{S}_5$ il gruppo simmetrico su 5 ogetti.

1. Si individui per ogni primo che divide l'ordine di $\mathbb{S}_5$ quanti sono i Sylow corrispondenti.
2. Si dimostri che i 3-Sylow e i 5-Sylow sono ciclici.
3. Si consideri il seguente sottogruppo di $GL(2, \mathbb{C})$.

$$Q = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Si verifichi se Q è isomorfo ad un 2-Sylow di $\mathbb{S}_5$.

Esercizio 3. Si calcoli:

1. il gruppo di Galois di $x^4 - 1$ su $\mathbb{Q}$;
2. il gruppo di Galois di $x^6 - 1$ su $\mathbb{Q}$;

In ognuno di questi casi si calcoli il campo di spezzamento del polinomio sul campo indicato ed il suo grado.