

**Prova scritta di Complementi di Algebra**  
**13 giugno 2018**

- Esercizio 1.**
1. Sia  $G$  un gruppo in cui tutti gli elementi non banali hanno ordine 2; si dimostri che  $G$  è abeliano.
  2. Si classifichino i gruppi di ordine 8.
  3. Si classifichino i gruppi abeliani di ordine 16.

- Esercizio 2.**
1. Sia  $K$  un campo e  $f$  un polinomio in  $K(X)$ . Dimostrare che  $f$  ha radici multiple se e solo se  $MCD(f, f') = 1$ , dove  $f'$  è il polinomio derivato di  $f$ .
  2. Dimostrare che i campi di caratteristica zero sono perfetti.
  3. Mostrare un esempio di campo non perfetto.

- Esercizio 3.** Si consideri  $E$  il campo di spezzamento di  $x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$ .
1. Si calcoli  $[E; \mathbb{Q}]$  e si individui  $Gal(E/\mathbb{Q})$ .
  2. Usando la corrispondenza di Galois si individuino i sottocampi di  $E/\mathbb{Q}$ .