

Prova scritta di Complementi di Algebra

Esercizio 1. 1. Se p è primo, dimostrare che un gruppo di ordine p^2 è abeliano.

2. Dimostrare che esistono gruppi di ordine 8 e di ordine 125 non abeliani.

3. A meno di isomorfismi, quali sono i gruppi abeliani di ordine p^3 ?

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine 357.

1. Dimostrare che G contiene un 7-Sylow normale.

2. Dimostrare che il 17-Sylow di G è contenuto nel centro di G .

3. Dimostrare che G è risolubile.

4. Discutere il possibile numero dei 3-Sylow.

Esercizio 3. Si consideri il campo $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i\sqrt{3})$.

1. Si verifichi che E è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.

2. Si calcoli $[E; \mathbb{Q}]$ e si individui $Gal(E/\mathbb{Q})$.

3. Si individuino i sottocampi di $E/\mathbb{Q}$.