

Corso propedeutico - esercizi 2

Parole chiave: insiemi, elementi, appartenenza, inclusione, sottoinsieme, insieme vuoto, insieme universo, insieme delle parti, insieme complementare, intersezione, unione, differenza, differenza simmetrica, leggi di De Morgan, coppie ordinate, prodotto cartesiano di insiemi.

- 1) Siano A, B insiemi. Si provi che $A \cap B = B$ se e solo se $A \cup B = A$ se e solo se $B \subseteq A$.
- 2) Siano A, B, C insiemi. Se $A \cup (B \cap C) = A$ e $B \cup C = C$, si verifichi che $A \cap (B \cap C) = B$.
- 3) Siano A, B, C insiemi. Si provi che $B \setminus A = B \setminus C$ se e solo se $A \cap B = B \cap C$.
- 4) Siano A, B, C insiemi. Indichiamo con $|A|$ il numero degli elementi di A . Supponiamo che $|A| = |B| = |C| = 5$. Determinare $|A \cup B \cup C|$ sapendo che $A \cap B = \emptyset$ e $|A \cap C| = |B \cap C| = 1$.
- 5) Siano A e B due insiemi e siano $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ i rispettivi insiemi delle parti. Si provi che

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B), \quad \mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Si trovi un esempio di insiemi A e B per cui sia $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

- 6) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n < x < n + 1\}$. Si determinino

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- 7) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{x \in \mathbb{R} : x \geq n\}$. Si determinino

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

- 8) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, A_n un sottoinsieme di U . Si provi che

$$\mathcal{C}_U\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_U A_n, \quad \mathcal{C}_U\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_U A_n.$$