

Corso propedeutico - esercizi 4

Parole chiave: Funzioni. Dominio, codominio, elemento immagine, insieme immagine, insieme controimmagine. Grafico di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di funzioni. Funzioni invertibili.

- 1) Disegnare sommariamente il grafico delle seguenti relazioni su $\mathbb{Q}$ e dire quali sono funzioni del tipo $x \mapsto y$:

$$|x| + |y| \leq 1, \quad |x + y| \leq 1, \quad x + y + 2 = 0, \quad y \leq x^2, \quad (x^2 - y)^2 \leq 0.$$

- 2) Dare un esempio di funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che sia iniettiva ma non suriettiva, e un esempio di funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che sia suriettiva ma non iniettiva.

- 3) Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, così definita

$$f(n) = 2n + 2.$$

Determinare $f(1)$, $f(\{2, 4, 5\})$, $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\})$. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Abbozzare il grafico di f . Se possibile determinare f^{-1} .

- 4) Sia $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, così definita

$$g(x) = 2x + 2.$$

Determinare $g(1)$, $g(\{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\})$, $g^{\leftarrow}(\{x \in \mathbb{Q} : x < 1 \vee x > 2\})$. Dire se g è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Abbozzare il grafico di g . Se possibile determinare g^{-1} .

- 5) Siano $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$,

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

- 6) Sia $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, così definita

$$g(x, y) = 2x + 2y - 1.$$

Determinare $g(1, 1)$, $g(\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + y^2 \leq 1\})$, $g^{\leftarrow}(\{x \in \mathbb{Q} : 1 < x < 2\})$. Dire se g è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

- 7) Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, così definita

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy), \quad \text{dove } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

In quali casi è iniettiva? In quali suriettiva?