

1. Insiemi numerici

Numeri naturali. Principio di induzione. Cenni di calcolo combinatorio. I coefficienti binomiali e il teorema del binomio. Numeri interi e numeri razionali.

2. Assiomi dei numeri reali

L'assioma di separazione. Maggioranti e minoranti, estremo superiore e inferiore. Teorema di esistenza dell'estremo superiore. Densità dei razionali nei reali. Archimedeità dei reali. Numeri complessi. Topologia dei numeri reali. Intorni, insiemi aperti e chiusi. Punti di accumulazione e di chiusura. Frontiera di un insieme. Insieme derivato. Il teorema di Cantor sugli intervalli inscatolati. Il primo teorema di Bolzano-Weierstrass.

3. Successioni e limiti di successioni

Successioni di numeri reali. Definizione di limite, casi particolari di limiti finiti e infiniti. Sottosuccessioni. Proprietà dei limiti: unicità, permanenza del segno. Teorema del confronto e dei due Carabinieri. Operazioni con i limiti. Teorema sul limite delle successioni monotone. Il limite fondamentale $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. Caratterizzazione dei chiusi tramite le successioni. Successioni e sottosuccessioni convergenti. Il secondo teorema di Bolzano-Weierstrass. Compatti di $\mathbb{R}$ e loro caratterizzazione. Successioni di Cauchy. Completezza di $\mathbb{R}$.

4. Serie numeriche

Generalità sulle serie. Serie convergenti. Condizione necessaria alla convergenza di una serie. Serie a termini positivi. Aut-aut per le serie a termini positivi. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: confronto, rapporto, radice, condensazione, ordine di infinitesimo. Serie a termini di segno qualunque. Criterio di Cauchy per le serie. Convergenza assoluta. Riarrangiamento dei termini di una serie. Serie a termini di segno alternato e criterio di Leibniz.

5. Limiti di funzioni

Definizione di limite per le funzioni. Limiti delle restrizioni: limite destro e sinistro. Confronto tra funzioni. Teorema dei due carabinieri. Operazioni con i limiti, funzioni infinitesime e infinite. Forme indeterminate. Limite della funzione composta. Limite delle funzioni monotone.

6. Funzioni continue

Somma, differenza, prodotto, quoziente, composizione di funzioni continue. Il teorema degli zeri. Continuità della funzione inversa. Potenze di base reale ed esponente intero e razionale. Potenze con esponente reale. Funzione esponenziale e

funzione logaritmo. Le funzioni trigonometriche. Limiti notevoli per l'esponenziale, il logaritmo e le funzioni trigonometriche. Compatezza e funzioni continue. Massimi e minimi: il teorema di Weierstrass. Teorema di Heine.

7. Calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale

La derivata come limite del rapporto incrementale. Derivate successive. Regole di derivazione: somma, prodotto, quoziente, funzioni composte, inverse. Teoremi di Rolle, di Lagrange e di Cauchy. Regole di de l'Hôpital. Caratterizzazione delle funzioni derivabili monotone. Funzioni convesse e concave. Studi di funzione. Formula di Taylor con resto di Lagrange.

8. Calcolo Integrale per funzioni reali di una variabile reale

Somme inferiori e superiori. Funzioni integrabili secondo Riemann. Caratterizzazione delle funzioni integrabili. Integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue. Teorema della media integrale. Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo. Integrazione per sostituzione e per parti.