

Nome e Cognome

Esercizio 1. (4+4 pt) Si Calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan x) - 1}{x - \log(1 + \sin x)} = \boxed{},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(e^{2x} + 1))}{\log(\sqrt{x})} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione la funzione

$$f(x) = \log(e^x - e^{2x} + 1)$$

determinando

i) dominio:

•

ii) segno:

$f(x) > 0$ per
$f(x) = 0$ per
$f(x) < 0$ per

.

iii) limiti alla frontiera del dominio:

iv) derivata prima $f'(x) =$

--

e suo segno.

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$

--

e suo segno.

vii) Grafico di f .

viii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\log(e^x - e^{2x} + 1) = \alpha.$$

Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si supponga che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia

$$f(2n) = 2n + 1, \quad f(2n + 1) = 2n.$$

- i) Si provi che l'equazione $f(x) = x$ ha infinite soluzioni.
- ii) Si provi che l'insieme $Z = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3\}$ non è superiormente limitato.
- iii) Si provi che, se f è due volte derivabile, allora esiste una successione $(w_n)_n$ in $[0, +\infty[$ tale che

$$\lim_n w_n = +\infty, \quad \text{e} \quad f''(w_n) = 0 \quad \text{per ogni } n.$$

Esercizio 4. (3+4 pt)

- i) Si determinino tutti i numeri complessi z tali che

$$z^2 + \bar{z} = 2z$$

- ii) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\frac{x}{2}}^x \log(1 + \sqrt{t}) \, dt}{x\sqrt{x}} = \boxed{}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan x) - 1}{x - \log(1 + \sin x)} = \boxed{-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan x) - 1}{x - \log(1 + \sin x)}$$

1° modo. Applico subito l'Hôpital $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\tan x) \cdot (1 + \tan^2 x)}{1 - \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\tan x)}{1 + \sin x - \cos x} \cdot \frac{(1 + \tan^2 x)}{\frac{1}{1 + \sin x}} \rightarrow 1$$

resta da calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\tan x)}{1 + \sin x - \cos x} \stackrel{H}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(\tan x) (1 + \tan^2 x)}{\cos x - \sin x} \rightarrow 1$$

quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\tan x)}{1 + \sin x - \cos x} = -1$

2° modo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan x) - 1}{x - \log(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tan x) - 1}{(\tan x)^2} \cdot \frac{(\tan x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x - \log(1 + \sin x)}$

resta da calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \log(1 + \sin x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \sin x + \sin x - \log(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x - \sin x}{x^3} \cdot x + \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \left(\frac{\sin x - \log(1 + \sin x)}{\sin^2 x} \right)}$$

resta da calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1 + \sin x)}{\sin^2 x} =$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \log(1 + y)}{y^2} \stackrel{H}{\Leftrightarrow} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{y+1}}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}$$

quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \log(1 + \sin x)} = 2$

e il limite iniziale è $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(e^{2x} + 1))}{\log(\sqrt{x})} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(\lg(e^{2x} + 1))}{\lg \sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \lg(e^{2x} + 1) &= \lg(e^{2x}(1 + e^{-2x})) \\ &= 2x + \lg(1 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg(\lg(e^{2x} + 1)) &= \lg(2x + \lg(1 + e^{-2x})) \\ &= \lg\left(2x \left(1 + \frac{\lg(1 + e^{-2x})}{2x}\right)\right) \\ &= \lg(2x) + \lg\left(1 + \frac{\lg(1 + e^{-2x})}{2x}\right) \\ &= \lg x + \lg 2 + \lg\left(1 + \frac{\lg(1 + e^{-2x})}{2x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(\lg(e^{2x} + 1))}{\lg \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x + \lg 2 + \lg\left(1 + \frac{\lg(1 + e^{-2x})}{2x}\right)}{\frac{1}{2} \lg x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\lg x} \left(1 + \frac{\lg 2}{\cancel{\lg x}} + \frac{\lg\left(1 + \frac{\lg(1 + e^{-2x})}{2x}\right)}{\cancel{\lg x}}\right)}{\frac{1}{2} \cancel{\lg x}} \end{aligned}$$

2

Si studi la funzione la funzione

$$f(x) = \log(e^x - e^{2x} + 1)$$

dominio. $\{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{2x} + 1 > 0\} =]-\infty, \lg \frac{\sqrt{5}+1}{2}[$

pongo $e^x = t$ devo determinare per quali t , $-t^2 + t + 1 > 0$
 $t^2 - t - 1 < 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

quindi $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < e^x < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ quindi
 < 0 (attenzione $e^x > 0 \forall x$)

$$x < \lg\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

segno

$$f(x) > 0$$

per $e^x - e^{2x} + 1 > 1$

$$e^x - e^{2x} > 0$$

$$t - t^2 > 0$$

$$0 < t < 1$$

$$e^x = t$$

$$t^2 - t < 0$$

$$0 < e^x < 1$$

$$x < 0$$

$$f(x) = 0$$

per $e^x - e^{2x} + 1 = 1$

$$e^x = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$f(x) < 0$$

per $0 < x < \lg\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lg(e^x - e^{2x} + 1) = \lg\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - e^{2x} + 1\right) = \lg 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \lg\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^-} \lg(e^x - e^{2x} + 1) = \lim_{y \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^-} \lg(t - t^2 + 1) = -\infty$$

derivata prima

$$f(x) = \lg(e^x - e^{2x} + 1)$$

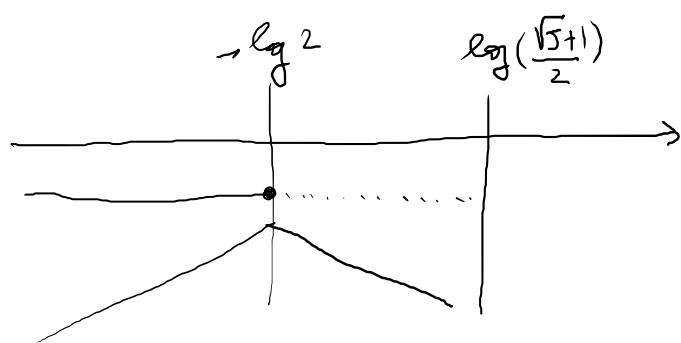
$$f'(x) = \frac{1}{e^x - e^{2x} + 1} \cdot e^x - 2e^{2x}$$

$$= \frac{e^x(1 - 2e^x)}{e^x - e^{2x} + 1}$$

$$f'(x) > 0 \text{ per } e^x(1 - 2e^x) > 0 \text{ vale per } 1 - 2e^x > 0$$

$$\text{vale per } e^x < \frac{1}{2}$$

$$x < \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -\lg 2$$



pto di max per $x = -\lg 2$

$$f(-\lg 2) = \lg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1\right) = \lg \frac{5}{4}$$

derivata seconda

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x}}{e^x - e^{2x} + 1}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x - 4e^{2x})(e^x - e^{2x} + 1) - (e^x - 2e^{2x})^2}{(e^x - e^{2x} + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{3x} + e^x - 4e^{3x} + 4e^{4x} - 4e^{2x} - e^{2x} + 4e^{3x} - 4e^{4x}}{(e^x - e^{2x} + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x - 4e^{2x} - e^{3x}}{(e^x - e^{2x} + 1)^2}$$

quindi $f''(x) > 0$ per $e^x - 4e^{2x} - e^{3x} > 0$

$$e^x(1 - 4e^x - e^{2x}) > 0$$

$$e^x = t \quad 1 - 4t - t^2 > 0 \quad t^2 + 4t - 1 < 0$$

$$t_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+1} \quad t = -2 \pm \sqrt{5}$$

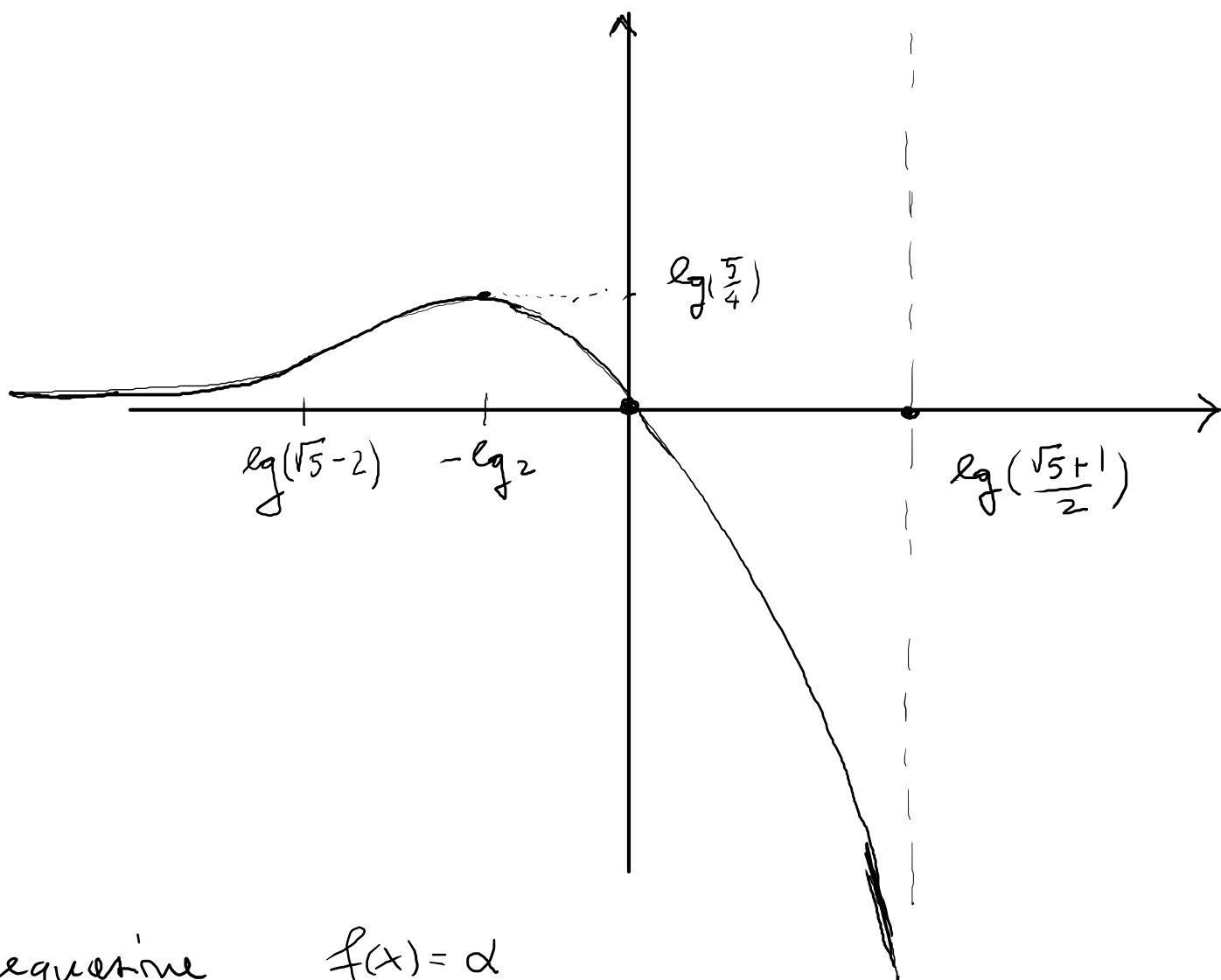
$$-2 - \sqrt{5} < e^x < -2 + \sqrt{5}$$

$$x < \lg(\sqrt{5} - 2)$$

quindi per $x < \lg(\sqrt{5} - 2)$ concava

per $x = \lg(\sqrt{5} - 2)$ flesso

$\lg(\sqrt{5} - 2) < x < \lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ convessa



equazione

$$f(x) = \alpha$$

quindi

per

$$\alpha > \lg \frac{5}{4}$$

non a una soluzione

per

$$\alpha = \lg \frac{5}{4} \quad \text{oppure} \quad \alpha \leq 0$$

c'è una soluzione

per

$$0 < \alpha < \lg \frac{5}{4}$$

a due soluzioni

Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si supponga che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia

$$f(2n) = 2n + 1, \quad f(2n + 1) = 2n.$$

- Si provi che l'equazione $f(x) = x$ ha infinite soluzioni.
- Si provi che l'insieme $Z = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3\}$ non è superiormente limitato.
- Si provi che, se f è due volte derivabile, allora esiste una successione $(w_n)_n$ in $[0, +\infty[$ tale che

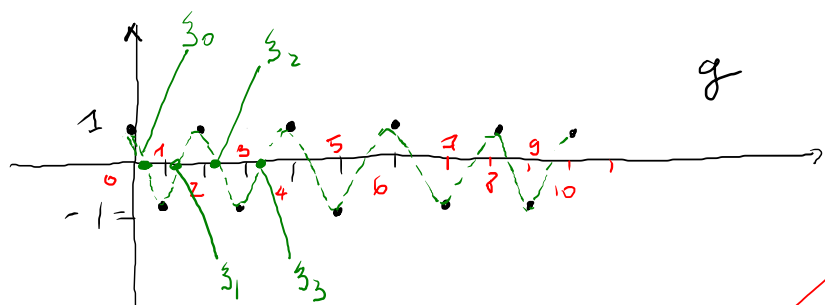
$$\lim_n w_n = +\infty, \quad \text{e} \quad f''(w_n) = 0 \quad \text{per ogni } n.$$

1) conviene definire $g(x) = f(x) - x$.

$g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, g derivabile (e quindi continua)

$$\text{si ha } g(2n) = f(2n) - 2n = 2n + 1 - 2n = 1$$

$$g(2n+1) = f(2n+1) - (2n+1) = 2n - 2n - 1 = -1$$



applicando il teorema degli zeri a g sugli intervalli $[2n, 2n+1]$ abbiamo che $\forall n, \exists \xi_n \in]2n, 2n+1[: g(\xi_n) = 0$. Quindi

$$f(\xi_n) - \xi_n = 0 \quad \text{quindi} \quad f(\xi_n) = \xi_n$$

cio' significa che $f(x) = x$ ha almeno una soluzione in ciascun intervallo $]2n, 2n+1[$

2) Applicando il teorema di Lagrange a g sugli intervalli $[2n-1, 2n]$ (lo si può fare perché g è derivabile)

$$\text{si ha } \exists \eta_n \in]2n-1, 2n[\text{ t.c. } g'(\eta_n) = \frac{g(2n) - g(2n-1)}{2n - (2n-1)} = \frac{1 - (-1)}{1} = 2$$

$$\text{quindi } \forall n \in \mathbb{N}, \exists \eta_n \in [2n-1, 2n] \text{ t.c. } g'(\eta_n) = 2$$

$$\text{ma } g'(\eta_n) = f'(\eta_n) - 1$$

$$\text{quindi } f'(\eta_n) = 3$$

$$\text{Quindi } \forall n \in \mathbb{N}, \exists \eta_n \in [2n-1, 2n] : f'(\eta_n) = 3$$

e l'insieme Z non può essere superiormente limitato

impediente
fondamentale

iii) Basta applicare il teorema di Rolle alle funzione

$$f' : [\eta_n, \eta_{n+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

dove gli η_n sono quelli del punto ii)

$$\text{se tali punti } f'(\eta_n) = f'(\eta_{n+1}) = 3$$

$$\text{quindi } \exists \mu_n \in]\eta_n, \eta_{n+1}[: f''(\mu_n) = 0$$

$$\text{l'osservazione che } \forall n, \quad \eta_n \in [2n-1, 2n]$$

$$\eta_{n+1} \in [2n+1, 2n+2]$$

fa sì che $(\mu_n)_n$ formino una successione di pti
che va a $+\infty$.

i) Si determinino tutti i numeri complessi z tali che

$$z^2 + \bar{z} = 2z$$

$$0, 1, \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si pone $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$

Si ha $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$2z = 2x + 2iy$$

quindi $x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = 2x + 2iy$

cioè $x^2 - y^2 - x + i(2xy - 3y) = 0$

cioè $\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy - 3y = 0 \end{cases}$

cioè $\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ y(2x - 3) = 0 \end{cases}$

ora $y(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

2 punti

$$z_1 = 0 \\ z_2 = 1$$

o

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} - y^2 - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y^2 = \frac{9}{4} - \frac{6}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2 punti

$$z_3 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_4 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ii) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\frac{x}{2}}^x \log(1 + \sqrt{t}) dt}{x\sqrt{x}} = \boxed{\frac{4 - \sqrt{2}}{6}}.$$

Poniamo $F(x) = \int_0^x \log(1 + \sqrt{t}) dt$

dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(x/2)}{x^{3/2}}$

applico l'Hôpital $\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x) - F'(x/2) \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} x^{1/2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{x/2})}{\frac{3}{2} \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x/2})}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x/2})}{\sqrt{x/2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} \cdot \frac{\log(1 + \sqrt{x/2})}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$