

Nome e Cognome

Esercizio 1. (3+3+3 pt)

i) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cosh x)}{\log(\cos x)} = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\log x} - (\log x)^x = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = \boxed{},$$

Esercizio 2. (7 pt) Si studi la funzione la funzione

$$f(x) = (x - 1)e^{-\frac{1}{x}}$$

determinando

i) dominio:

ii) segno:

$f(x) > 0$ per
 $f(x) = 0$ per
 $f(x) < 0$ per

iii) limiti alla frontiera del dominio:

iv) derivata prima $f'(x) =$

e suo segno.

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno.

vii) Grafico di f .

Esercizio 3. (3+3 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 .

- i) Se $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$, si provi che esiste U intorno di 0 tale che, per ogni $x \in U \cap]0, +\infty[$,

$$f(x) > 0.$$

- ii) Se $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, si provi che esiste V intorno di 0 tale che, per ogni $x \in V \setminus \{0\}$,

$$f(x) > 0.$$

Esercizio 4. (3+3+2 pt)

i)

$$\int_0^1 x \sqrt{2+x^2} dx = \boxed{},$$

ii)

$$\int x \cos x \sin x dx = \boxed{},$$

iii) Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e convessa. Sia $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Si provi che

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \leq 1.$$

i) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cosh x)}{\log(\cos x)} = \boxed{-1},$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cosh x)}{\log(\cos x)}$ è un caso $\frac{0}{0}$ applico
 la regola di de l'Hôpital

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cosh x} \cdot \sinh x}{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{\cos x}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{- \frac{\cos x}{\cosh x}}_{\downarrow -1} \cdot \underbrace{\frac{\sinh x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow 1} = -1
 \end{aligned}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\log x} - (\log x)^x = \boxed{-\infty},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\log x} - (\log x)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\log x)^2} - e^{x \log(\log x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log(\log x)} \left(e^{(\log x)^2 - x \log(\log x)} - 1 \right)$$

ora, per $x > e^e$, $x(\log(\log x)) \geq x$ quindi

$-x(\log(\log x)) \leq -x$ quindi

$(\log x)^2 - x \log(\log x) \leq \log^2 x - x$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^2 - x \log \log x \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^2 - x = -\infty$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\log x)^2 - x \log(\log x)} - 1 = -1$$

quindi

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{x \log(\log x)}}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\left(e^{(\log x)^2 - x \log \log x} - 1 \right)}_{\downarrow -1} = -\infty
 \end{aligned}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = \boxed{\frac{1}{3}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{(1 - \cos x) \cdot x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x^2}{1 - \cos x}}_{\downarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{x - \sin x}{x^3}}_{\downarrow \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2. (7 pt) Si studi la funzione la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{x}}$$

determinando

i) dominio:

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$$

unico punto escluso
 $x=0$

ii) segno:

$$\begin{array}{ll} f(x) > 0 & \text{per } x > 1 \\ f(x) = 0 & \text{per } x = 1 \\ f(x) < 0 & \text{per } x < 1 \wedge x \neq 0 \end{array}$$

il segno di $f(x)$ è determinato da $(x-1)$, essendo
 $e^{-\frac{1}{x}} > 0, \forall x \neq 0$.

iii) limiti alla frontiera del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

iv) derivata prima $f'(x) =$

$$e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x-1}{x^2} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2} \right)$$

e suo segno.

il segno di $f'(x)$ è determinato dal segno di $x^2 + x - 1$
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \sqrt{5}-1 \end{array}$
 $f'(x) > 0$ per $x < \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cup x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
 $f'(x) = 0$ per $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

massimo in $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

minimo in $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$f'(x) < 0$ per
 $-\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 0 \cup$
 $0 < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

vi) Derivata seconda $f''(x) =$

$$e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2+x-1}{x^4} + \frac{(2x+1)x^2 - 2x(x^2+x-1)}{x^4} \right)$$

e suo segno.

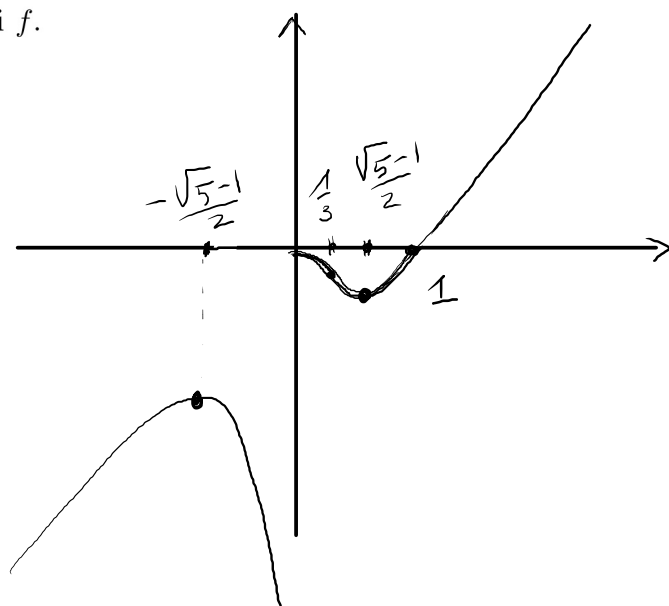
$$= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{3x-1}{x^4} \right)$$

$$f''(x) > 0 \text{ per } x > \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = 0 \text{ per } x = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) < 0 \text{ per } x < \frac{1}{3} \wedge x \neq 0$$

vii) Grafico di f .



Esercizio 3. (3+3 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 .

i) Se $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$, si provi che esiste U intorno di 0 tale che, per ogni $x \in U \cap]0, +\infty[$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}. \quad f(x) > 0.$$

Per il tes. della permanenza del segno applicato a $\frac{f(x)}{x}$

si ha che esiste un int. U di 0 t.c. $\forall x \in U \setminus \{0\}$,
 $\frac{f(x)}{x} > 0$, quindi per $x > 0 \wedge x \in U \setminus \{0\}$ si ha $f(x) > 0$

ii) Se $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, si provi che esiste V intorno di 0 tale che, per ogni $x \in V \setminus \{0\}$,

Applico la formula di Taylor con il resto di Tesoro

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + r_2(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_2(x)}{x^2} = 0$$

quindi $f(x) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + r_2(x)$

quindi $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + \frac{r_2(x)}{x^2}$

quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} > 0$

Applico il tes. della permanenza del segno a $\frac{f(x)}{x^2}$
 ho che esiste U di 0 tale che, $\forall x \in U \setminus \{0\}$

$\frac{f(x)}{x^2} > 0$ quindi $\forall x \in U \setminus \{0\}$, $f(x) > 0$

Esercizio 4. (3+3+2 pt)

i)

$$\int_0^1 x \sqrt{2+x^2} dx = \boxed{\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}}$$

integrale per sostituzione

$$2+x^2 = t, \quad 2x dx = dt, \quad x=0 \rightarrow t=2, \quad x=1 \rightarrow t=3$$

$$\int_0^1 x \sqrt{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_2^3 \right) = \frac{1}{3} \left(3^{3/2} - 2^{3/2} \right)$$

$$= \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

ii)

$$\int x \cos x \sin x dx = \boxed{\frac{x}{4} + \frac{\cos x \sin x}{4} - \frac{x \cos^2 x}{2} + c},$$

integrale per parti

$$\int \underbrace{x \cos x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} dx = x \cos x (-\sin x) + \int \sin x (\cos x - x \sin x) dx$$

quindi

$$\int x \cos x \sin x dx = -x \cos^2 x + \int \cos^2 x dx - \int x \cos x \sin x dx$$

quindi

$$2 \int x \cos x \sin x dx = -x \cos^2 x + \int \cos^2 x dx \quad \text{e} \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c$$

quindi

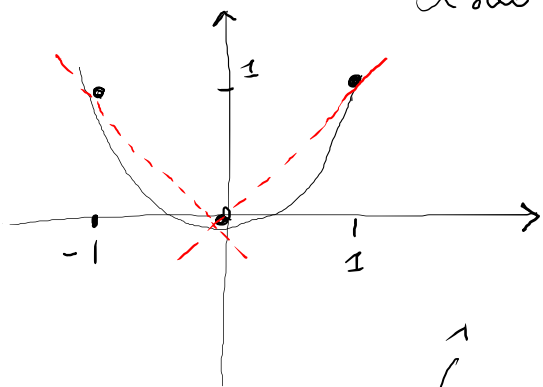
$$\int x \cos x \sin x dx = \frac{1}{2} \left(-x \cos^2 x + \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} \right) + c$$

iii) Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e convessa. Sia $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Si provi che

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \leq 1.$$

f è convessa e passa per $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$

il suo grafico



in particolare

$$f(x) \leq -x \quad \text{per } x \in [-1, 0]$$

$$f(x) \leq x \quad \text{per } x \in [0, 1]$$

quindi

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \leq \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt \leq \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$