

Nome e Cognome

Esercizio 1. (2+2+2+2 pt)

i) Si calcoli

$$\lim_n \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{},$$

ii) Si calcoli

$$\lim_n \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}} = \boxed{},$$

iii) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^3 x)}{x - \sin x} = \boxed{},$$

iii) Si dica se esiste ed eventualmente si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - \cos x}}{|x|} = \boxed{},$$

Esercizio 2. (7 pt) Si studi la funzione la funzione

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

determinando

i) dominio:

ii) segno:

$f(x) > 0$ per
 $f(x) = 0$ per
 $f(x) < 0$ per

iii) limiti alla frontiera del dominio:

iv) derivata prima $f'(x) =$

e suo segno.

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno.

vii) Grafico di f .

viii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$(1 - x^2)e^{-x} = \alpha.$$

Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Sia $\alpha \in]0, 1[$ e sia S_α l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.

i) È possibile che $S_\alpha = \emptyset$?

ii) S_α può essere illimitato?

iii) S_α è chiuso?

iv) f può essere convessa?

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

i) Si calcoli

$$\int_0^1 x \sqrt{2-x^2} \, dx = \boxed{},$$

ii) Si calcoli

$$\int x \, \text{sen} \, (2x) \, dx = \boxed{},$$

iii) Si scriva la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+x},$$

con $x_0 = 0$ e $n = 3$.