
Esercizio 1. (2+2+2+2 pt, i risultati vanno giustificati)

i) Si calcoli

$$\lim_n \frac{1}{n} \cos(n\pi).$$

ii) Si calcoli

$$\lim_n n(\log \sqrt{n+1} - \log \sqrt{n}).$$

iii) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

iv) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x}.$$

Esercizio 2. (7 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = 2x - 3 \log(1 + x^2)$$

determinando

- i) dominio;
- ii) limiti alla frontiera del dominio;
- iii) eventuali asintoti;
- iv) derivata prima e suo segno.
- v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.
- vi) Derivata seconda e suo segno.
- vii) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- i) Provare che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ è aperto.
- ii) Provare che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$ è chiuso.
- iii) Provare che l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\}$ è limitato.
- iv) Provare che $[0, +\infty[\subseteq f(\mathbb{R})$.

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

i) Si calcoli

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos(x^2) dx.$$

ii) Si calcoli

$$\int \log(x^2 + 1) dx.$$

iii) Si scriva la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = \sqrt{1-x},$$

con $x_0 = 0$ e $n = 2$.