

Nome e Cognome

Esercizio 1. (2+2+2+2 pt, i risultati vanno giustificati)

i) Si calcoli

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = \boxed{},$$

ii) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})\sqrt{x} = \boxed{},$$

iii) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = \boxed{},$$

iv) Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2} dt}{x^2} = \boxed{},$$

Esercizio 2. (10 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = x^2(6 - (\log x)^2)$$

determinando

i) dominio:

ii) segno:

$f(x) > 0$ per
 $f(x) = 0$ per
 $f(x) < 0$ per

ii1) limiti alla frontiera del dominio:

iv) eventuali asintoti:

v) derivata prima $f'(x) =$

e suo segno.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

viii) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2 pt) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(0) = -1$ e $f(1) = 2$.

i) Provare che $[-1, 2] \subseteq f([0, 1])$.

ii) Si dica, giustificando la risposta, se è possibile che $[0, +\infty[\subseteq f([0, 1])$.

Esercizio 4. (3 +3 pt)

i) Si calcoli

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} \, dx = \boxed{},$$

ii) Si calcoli

$$\int x \log(x^2 + 1) dx = \boxed{},$$