

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo ☐ Fonda ☐

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+3+3+2 pt)

Si calcolino i seguenti limiti

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(3 + \sin x)}{x} = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1)\log(x+1)}{x^2} = \boxed{}.$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = \log(e^{2x} - e^x + 1),$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$
e suo segno.

viii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

x) Dire, al variare di α in $\mathbb{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$\log(e^{2x} - e^x + 1) = \alpha.$$

Esercizio 3. (5 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si provi che se l'equazione

$$f(x) = x$$

ha per soluzioni i valori $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, allora l'equazione

$$f'(x) = 1$$

ha almeno due soluzioni nell'intervallo $]0, 2[$.

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

i) Si calcoli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \boxed{},$$

ii)

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \log t^4 \, dt = \boxed{}.$$