

Corso di Laurea in Intelligenza Artificiale e Data Analytics

Esame di Analisi Matematica 1 – 24/01/2023 Fila A

Nome e Cognome

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+2+3+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, giustificando le risposte.

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x}{x + \sqrt{x}} = \boxed{1},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1 + \sin x)}{\tan^2 x} = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{x \arctan x} = \boxed{},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \sqrt{x^2 + 1} - 2x^4 - x^2 = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} e^{-x}$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno.



vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

ix) Grafico di f .

x) Dire, al variare di α in $\mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{x}{4x+1} = \alpha e^x.$$

Esercizio 3. (1+2+2 pt)

Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile fino al secondo ordine e tale che

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 0.$$

i) Si provi che esistono almeno due punti di $] -1, 1[$ in cui f' si annulla.

ii) Si provi che esiste almeno un punto di $] - 1, 1[$ in cui f'' si annulla.

ii) Si provi che se f è convessa allora f è costante.

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

Si calcoli

i)

$$\int x \cos^2 x \, dx =$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \boxed{}.$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_x^{2x-1} \frac{1}{1 + \log t} dt}{x - 1} = \boxed{}.$$