

Corso di Laurea in Intelligenza Artificiale e Data Analytics
Esame di Analisi Matematica 1 – 20/06/2023

Nome e Cognome

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+3+2+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, giustificando le risposte.

i)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\pi n) - n}{\sin(\pi n) + n} = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x \sin(\frac{1}{x}) - 1) = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \boxed{},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(\cos x) + \sin^2 x}{x^4} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (6 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = xe^{-(x+1)}$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno

viii) Concavità e convessità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

x) Si determini al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$e^{x+1} = \alpha x.$$

Esercizio 3. (2+2+3 pt)

Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

f sia continua su $[-1, 1]$ e sia derivabile su $] -1, 1[$.

i) Provare che esiste $\xi_1 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_1) = 0.$$

ii) Provare che esiste $\xi_2 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_2) = -\frac{1}{4}.$$

iii) Provare che esiste $\xi_3 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_3) = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

- i) Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = (x + 1) \sin x$$

con $x_0 = 0$ e $n = 3$.

- ii) Calcolare

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \boxed{}.$$

- iii) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} (1 - t^2) e^{-t^2} \, dt}{x \sin x}.$$