

Nome e Cognome

GAVA MARSIKH

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+3+2+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, giustificando le risposte.

i)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\pi n) - n}{\sin(\pi n) + n} = \boxed{-1}$$

$$-1 \leq \cos(\pi n) \leq 1, \quad -1 \leq \sin(\pi n) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1-n}{1+n} \leq \frac{\cos(\pi n) - n}{\sin(\pi n) + n} \leq \frac{1-n}{1+n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x \sin(\frac{1}{x}) - 1) = \boxed{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x \sin(\frac{1}{x}) - 1) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} (\sin y) - 1 \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y - y}{y^2} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \cos y - \sin y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y \left(\frac{y}{\tan y} - 1 \right)}{y^2} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-y \sin y + \cos y - \sin y}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} (\sin y) \right) = 0 \end{aligned}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sqrt{1-\cos y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{y^2}{1-\cos y}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} y &= 2\arccos x \\ (x &= \cos y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\in [-1, 1] \\ y &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

ARCCOS:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = 1/2$$

(*)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(\cos x) + \sin^2 x}{x^4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(\cos x) + \sin^2 x}{x^4} \xrightarrow{\text{H\u00f4pital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x + \sin x \cos x}{4x^3} \xrightarrow{\text{H\u00f4pital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+\tan^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x}{6x^2} \xrightarrow{\text{H\u00f4pital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan x (1+\tan^2 x) + 2 \cos x (-\sin x) - 2 \sin x \cos x}{12x} \xrightarrow{\text{H\u00f4pital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x - \tan^3 x - 2 \sin x \cos x}{6x} \xrightarrow{\text{H\u00f4pital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \left(-1 - \tan^2 x - 3 \tan^2 x (1+\tan^2 x) - 2 \cos(2x) \right) = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 2. (6 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = x e^{-(x+1)}$$

determinando:

(*) Dominio:

$\mathbb{R}$

(*) Segno:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ f(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ f(x) &< 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

$$e^{-(x+1)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(*) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x+1}} = 0$$

$$\alpha > 1, \beta > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{d^\beta x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-(x+1)} = -\infty$$

~~h)~~ Eventuali asintoti:

ASINTOTO ORIZZONTALE: $y = 0$ (per $x \rightarrow +\infty$)

ASINTOTO OBLIQUO: $y = mx + q$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-(x+1)} = +\infty \Rightarrow \text{no asintoto obliquo!}$$

~~x~~ Derivata prima $f'(x) =$

$$e^{-(x+1)}(1-x)$$

e suo segno

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ f'(x) &< 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{-(x+1)} + x e^{-(x+1)} \cdot (-1) = \underbrace{e^{-(x+1)}}_0 (1-x)$$

~~x~~ Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

INTERVALLO DI CRESCITA: $x \in (-\infty; 1)$

INTERVALLO DI DECRESCITA: $x \in (1; +\infty)$

PUNTO DI MINIMO (GLOBALE): $x = 1$

vi) Derivata seconda $f''(x) =$

$$e^{-(x+1)}(x-2)$$

e suo segno

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ f''(x) > 0 &\Leftrightarrow x > 2 \\ f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

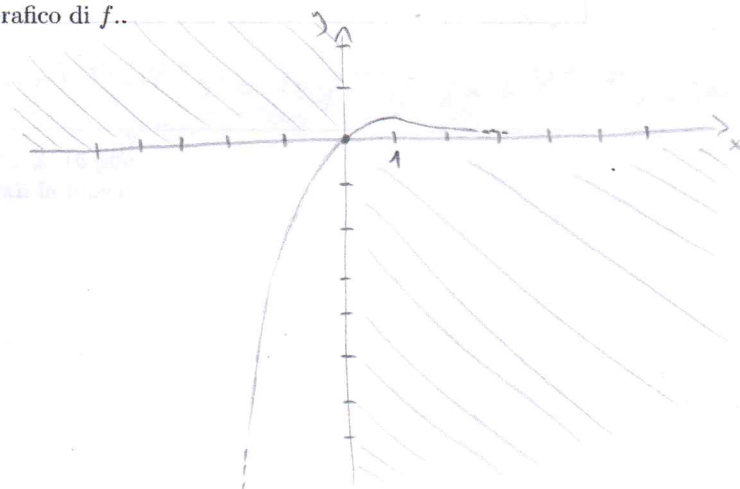
vii) Concavità e convessità. Eventuali punti di flesso.

Concavità pura: $x \in (-\infty; 2)$

Convessità pura: $x \in (2; +\infty)$

Punto di flesso: $x = 2$

viii) Grafico di f .



$$f(1) = e^{-2}$$

ix) Si determini al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

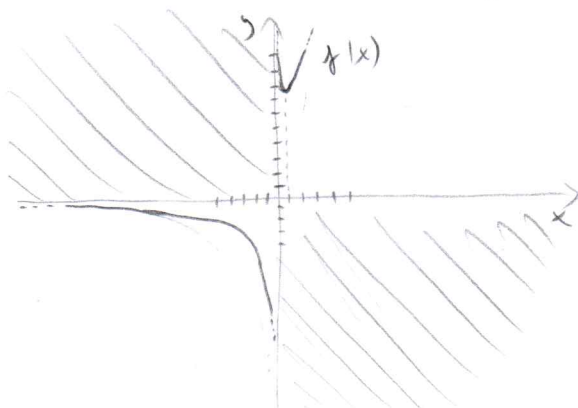
$$e^{x+1} = \alpha x.$$

oss: se $x=0: e \neq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ si può non considerare quel caso

Si può fare un piccolo studio di $\frac{e^{x+1}}{x} = f(x)$, continua nel suo dominio che è $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Inoltre: } f'(x) = \frac{e^{x+1}(x-1)}{x^2}, \text{ dunque: } \begin{aligned} f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ f'(x) &< 0 \Leftrightarrow x < 1, \alpha x < 1 \end{aligned}$$



Le intersezioni con la retta $h(x) = \alpha$ danno le soluzioni al problema, dunque:

$\alpha < 0$: 1 soluzione, negativa
 $0 \leq \alpha < f(1) = e^2$: nessuna soluzione
 $\alpha = e^2$: 1 soluzione, positiva
 $\alpha > e^2$: 2 soluzioni, positive

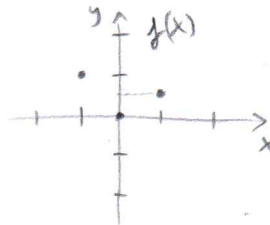
i segni
 Solo dati
 dal segno
 di x

Esercizio 3. (2+2+3 pt)

Sia $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

f sia continua su $[-1, 1]$ e sia derivabile su $] -1, 1[$.



(i) Provare che esiste $\xi_1 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_1) = 0.$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS: $[-1, 1]$ è un compatto, f continua su $[-1, 1]$.

$\Rightarrow f([-1, 1])$ ha massimo e minimo assoluti

Osservare che $f(0) < f(-1)$ e $f(0) < f(1)$, dunque $f(0)$ è il minimo assoluto. Per il TEOREMA DI FERMAT si avrà che il minimo si ottiene per un $\xi_1 \in (-1, 1)$. Per il TEOREMA DI FERMAT si avrà che il minimo

rispetto: $f'(\xi_1) = 0$ (IDEA DI UN'ALTERNATIVA: Come nell'esercizio di iii) ma si consideri ad esempio $g(x) = \frac{1}{3}$)

(ii) Provare che esiste $\xi_2 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_2) = -\frac{1}{4}.$$

Per il TEOREMA DI LAGRANGE, $\exists \xi_2 \in (-1, 1)$ tale che:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

(iii) Provare che esiste $\xi_3 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_3) = -\frac{1}{2}.$$

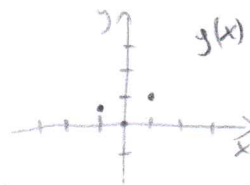
Definisco la funzione $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x$, che dunque avrà valori: $g(-1) = \frac{1}{2}$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

g è continua su $[-1, 1]$ poiché somma di continue ed è derivabile su $]-1, 1[$.

Per questioni analoghe al punto i), si avrà che

$$\exists \xi_3 \in (-1, 1) \text{ tale che: } g'(\xi_3) = 0 \Rightarrow f'(\xi_3) + \frac{1}{2} = 0$$

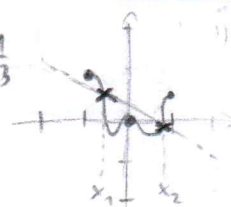
$$\Rightarrow f'(\xi_3) = -\frac{1}{2}$$



✓ IDEA DI UN'ALTERNATIVA: definiamo una retta $g(x) = y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

Due valori intermedi $\Rightarrow \exists 2$ intersezioni di retta x_1 e x_2

TEO LAGRANGE: allora deve esistere $\xi_3 \in (x_1, x_2)$ t.c. $f'(\xi_3) = -\frac{1}{2}$



Esercizio 4. (2+2+3 pt)

i) Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = (x+1) \sin x \Rightarrow f(0) = 0$$

con $x_0 = 0$ e $n = 3$.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i}_{\text{TAYLOR}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{\text{RESTO DI LAGRANGE}}, \quad \begin{cases} \xi \in (x_0, x) & \text{se } x > x_0 \\ \xi \in (x, x_0) & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

$$f^{(1)}(0) = x \cos x + \sin x + \cos x \Big|_0 = 1$$

$$f^{(2)}(0) = -x \sin x + 2 \cos x - \sin x \Big|_0 = 2$$

$$f^{(3)}(0) = -x \cos x - 3 \sin x - \cos x \Big|_0 = -1$$

$$f^{(4)}(x) = x \sin x - 4 \cos x + \sin x$$

$$f(x) = 0 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} x^3 + \frac{(\xi+1) \sin \xi - 4 \cos \xi}{4!} x^4$$

$$\begin{cases} \xi \in (0, x) & \text{se } 0 < x \\ \xi \in (x, 0) & \text{se } 0 > x \end{cases}$$

ii) Calcolare

$$\int_1^2 x \log x \, dx = 2 \log 2 - \frac{3}{4}$$

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \left[\log x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = 2 \log 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx$$

$$\boxed{\log' = 1/x - 1/x^2}$$

$$= 2 \log 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \log 2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2 \log 2 - \frac{3}{4}$$

iii) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} (1-t^2) e^{-t^2} \, dt}{x \sin x}$$

$$F(x) = \int_0^x (1-t^2) e^{-t^2} \, dt$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(x^3)}{x \sin x} \stackrel{\text{DE L'HOPITAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x F'(x^2) - 3x^2 F'(x^3)}{x \cos x + \sin x}$$

TOO FORMALITÀ PER
DE L'HOPITAL

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1-x^4)e^{-x^4} - 3x^2(1-x^6)e^{-x^6}}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-2x^5)e^{-x^4} - (3x^2-3x^8)e^{-x^6}}{x \cos x + \sin x}$$

$$\stackrel{\text{DE L'HOPITAL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-10x^4)e^{-x^4} + (2x-2x^5)e^{-x^4}(-4x^3) - [(6x-24x^7)e^{-x^6} + (3x^2-3x^8)e^{-x^6}(-6x^5)]}{-x \sin x + \cos x + \cos x} = 1$$