

Corso di Laurea in Intelligenza Artificiale e Data Analytics
Esame di Analisi Matematica 1 – 11/07/2023

Nome e Cognome

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+3+2+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, giustificando le risposte.

i)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) x = \boxed{},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x) - x)}{\sin x^2} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (6 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno

viii) Concavità e convessità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2+3 pt)

Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

f sia continua su $[-1, 1]$ e sia derivabile su $] -1, 1[$.

i) Provare che esiste $\xi_1 \in] -1, 1[$ tale che

$$f'(\xi_1) = 0.$$

ii) Provare che

$$[0, 1] \subseteq f(\mathbb{R}).$$

ii) Provare che

$$\{-1, 1\} \subseteq f'(\mathbb{R}).$$

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

i) Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = (x - 1) \cos x$$

con $x_0 = 0$ e $n = 3$.

ii) Calcolare

$$\int_1^2 x \sin x \, dx = \boxed{} .$$

iii) Dire se la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

è crescente sull'intervallo $] \frac{1}{2}, 1[$.