

Corso di Laurea in Intelligenza Artificiale e Data Analytics
Esame di Analisi Matematica 1 – 31/08/2023

Nome e Cognome

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+3+3+2 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, giustificando le risposte.

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x^3} = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan(x^3)} = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x\sqrt{x}) \right) = \boxed{},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = e^x(x-1)$$

determinando:

i) Dominio:

.

ii) Segno:

.

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno

.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno

viii) Concavità e convessità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

x) Si dica se esiste un valore $a \in]-\infty, 1[$ tale che

$$\int_a^2 e^x(x-1) dx = 0.$$

Esercizio 3. (2+2 pt)

Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

f sia continua su $[-1, 1]$ e sia derivabile su $] - 1, 1[$.

i) Provare che l'equazione $f'(x) = 1$ ha almeno 2 soluzioni in $] - 1, 1[$.

ii) Provare che, se f è derivabile fino al secondo ordine in $] - 1, 1[$, allora l'equazione $f''(x) = 0$ ha almeno una soluzione in $] - 1, 1[$.

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

- i) Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = x \sin x$$

con $x_0 = 0$ e $n = 3$.

- ii) Calcolare

$$\int_1^2 x \cos x \, dx = \boxed{}.$$

- iii) Dire se la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

è crescente sull'intervallo $] \frac{1}{2}, 1[$.