

Corsi di Laurea in IADA – Chimica
Esame di Analisi Matematica 1 – Matematica 1 con esercitazioni
19/01/2024 – Fila A

Nome e Cognome.....

Corso di Laurea **IADA** ☐ **Chimica** ☐

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+2+3+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, **giustificando le risposte**.

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 + x^2 + \sin x}{x^2 - x^3 + \cos x} = \boxed{-\infty},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 + x^2 + \sin x}{x^2 - x^3 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4(6 + \frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x^4})}{x^3(-1 + \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{6 + \frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x^4}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x^3}}.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x^4}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x^3}} = -6$$

si può concludere.

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\tan(\pi x)} = \boxed{\frac{1}{\pi}},$$

Essendo un caso $\frac{0}{0}$, applico la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\tan(\pi x)} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\pi(1 + \tan^2(\pi x))} = \frac{1}{\pi}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{\arcsin x} = \boxed{0},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \cdot \frac{x}{\arcsin x}.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{\sqrt{1+x^2}-1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$$

resta da calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$$

Essendo un caso $\frac{0}{0}$, applico la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{1} = 0.$$

si può concludere.

iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{\log(\log(e+x^2))} = \boxed{0}.$$

$$\log(\log(e+x^2)) = \log((\log(e(1+\frac{x^2}{e}))) = \log(1+\log(1+\frac{x^2}{e}))$$

quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{\log(\log(e+x^2))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{\log(1+\log(1+\frac{x^2}{e}))} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{\log(1+\frac{x^2}{e})} \frac{\log(1+\frac{x^2}{e})}{\log(1+\log(1+\frac{x^2}{e}))} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{\frac{x^2}{e}} \frac{\frac{x^2}{e}}{\log(1+\frac{x^2}{e})} \frac{\log(1+\frac{x^2}{e})}{\log(1+\log(1+\frac{x^2}{e}))} &= \end{aligned}$$

Il secondo e il terzo fattore tendono a 1. Resta da calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^2} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e \frac{-x(1-x)^{-\frac{1}{2}} + \sin x}{2x} = 0$$

Esercizio 2. (8 pt, di cui 3 per l'ultima domanda)

Si studi la funzione

$$f(x) = (x-1)e^x + 1$$

determinando:

i) Dominio: $\boxed{\mathbb{R}}$.

ii) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x + 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x + 1 = +\infty.$$

iii) Derivata prima $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = \boxed{xe^x}$

iv) Segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \text{ per } x > 0$$

$$f'(x) = 0 \text{ per } x = 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ per } x < 0$$

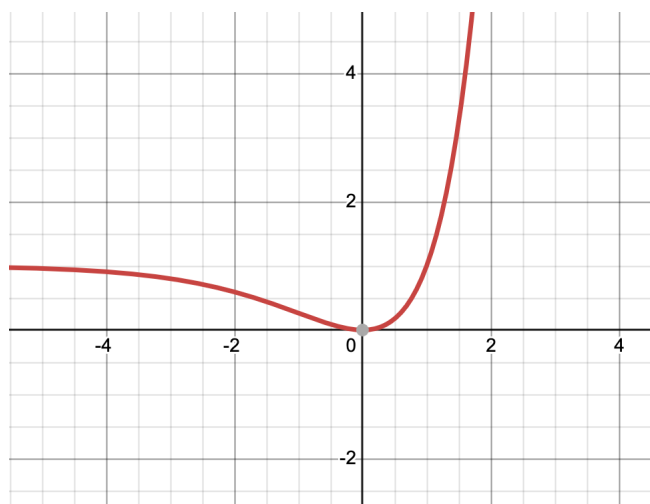
v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

La funzione decresce in $x < 0$ e cresce in $x > 0$. Essendo continua ha un minimo assoluto (globale) in $x = 0$. $f(0) = 0$

vi) Segno di f .

La funzione è maggiore di 0 per $x \neq 0$ ed è uguale a 0 in $x = 0$.

vii) Grafico di f .



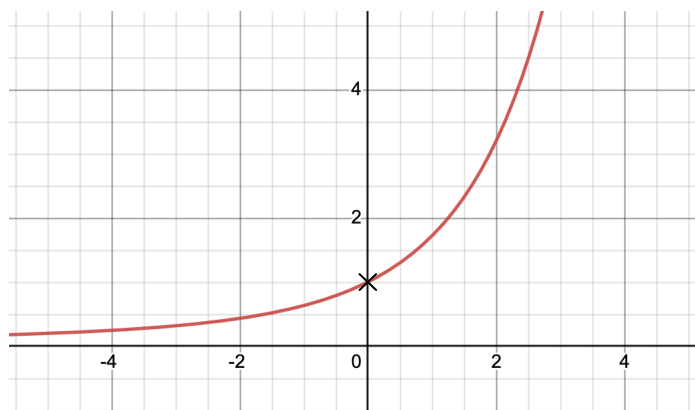
viii) Dire, al variare di α in $\mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^x - 1}{x} = \alpha.$$

(sugg. Studiare brevemente la funzione $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, utilizzando quello che si sa sulla $f(x)$ vista prima.)

- Il dominio della funzione $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- la funzione è sempre maggiore di 0.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- la derivata prima $g'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$, quindi per quanto visto sulla funzione f , è sempre maggiore di 0.
- la g è strettamente crescente sul suo dominio.

Conclusione: la g è strettamente crescente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, va da 0 a $+\infty$, ma non assume il valore 1.



Quindi l'equazione

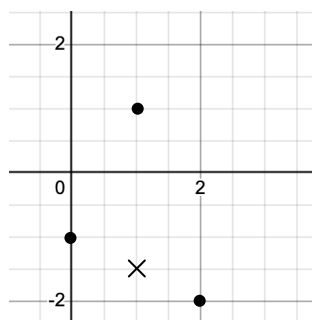
$$\frac{e^x - 1}{x} = \alpha.$$

ha 1 soluzione per $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ e nessuna soluzione per $\alpha \leq 0$ oppure $\alpha = 1$.

Esercizio 3. (1+2+2 pt)

Sia $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1 \quad \text{e} \quad f(2) = -2.$$



- i) Si provi che esistono almeno due punti di $]0, 2[$ in cui f si annulla.

Basta applicare il teorema degli zeri a f negli intervalli $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

- ii) Si provi che esiste almeno un punto di $]0, 2[$ in cui f' si annulla.

Basta applicare il teorema di Rolle a f nell'intervallo $[\xi_1, \xi_2]$, dove ξ_1 e ξ_2 sono i due punti trovati al passo precedente. Alternativamente si può osservare che, dati i valori agli estremi e in 1, la funzione f assume massimo assoluto (che esiste per il teorema di Weierstrass) in un punto interno e quindi si può applicare il teorema di Fermat.

- iii) Si provi che f non può essere convessa.

Basta osservare che il segmento di estremi $(0, -1)$ e $(2, -2)$ passa per il punto $(1, -\frac{3}{2})$ e mentre la funzione in 1 vale 1, quindi non può essere convessa.

Esercizio 4. (2+2+3 pt)

i) Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = (4+x)^{\frac{1}{2}}$$

con $x_0 = 0$ e $n = 3$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^4$$

con $\xi \in]0, x[$.

$$\begin{aligned}f(x) &= (4+x)^{\frac{1}{2}}, & f(0) &= 2 \\f'(x) &= \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}}, & f'(0) &= \frac{1}{4} \\f''(x) &= -\frac{1}{4}(4+x)^{-\frac{3}{2}}, & f''(0) &= -\frac{1}{32} \\f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(4+x)^{-\frac{5}{2}}, & f^{(3)}(0) &= \frac{3}{256} \\f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(4+x)^{-\frac{7}{2}}.\end{aligned}$$

Quindi

$$(4+x)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3 - \frac{15}{348}(4+\xi)^{-\frac{7}{2}}x^4$$

con $\xi \in]0, x[$.

ii) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x \, dx = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2} \log 2}.$$

Osserviamo che

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx - \int 1 \, dx = \tan x - x + c.$$

Quindi integro per parti

$$\int x \tan^2 x \, dx =$$

$$x(\tan x - x) - \int (\tan x - x) \, dx = x(\tan x - x) + \log(\cos x) + \frac{x^2}{2} + c.$$

Quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x \, dx = \left[x \tan x - \frac{x^2}{2} + \log(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2} \log 2.$$

iii) (IADA) Dire se la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{1+x}^{1+2x} \log(t + e^t) dt.$$

è crescente sull'intervallo $[0, 1[$.

Indicata con $g(t)$ la funzione $\log(t + e^t)$ e $G(t)$ una sua primitiva si ha

$$f(x) = G(1 + 2x) - G(1 + x)$$

quindi

$$f'(x) = (G(1+2x) - G(1+x))' = 2G'(1+2x) - G'(1+x) = 2g(1+2x) - g(1+x).$$

Ora la funzione $g(t)$ è crescente e > 0 se $t \geq 1$ quindi $2g(1+2x) > g(1+x)$, se $x \geq 0$. **Quindi la funzione f è crescente su $[0, 1[$.**

iii) (Chimica) Dire per quali valori di $\alpha \in [0, +\infty[$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arccos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Se $\alpha = 0$ allora il termine generale è

$$\arccos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \arccos(1) \sin(1) = 0$$

quindi la serie convergente.

Se $\alpha > 0$ allora

$$\lim_n \frac{\arccos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \arccos x \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

La serie ha allora lo stesso carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

che sappiamo è convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $0 < \alpha < 1$. **In conclusione la serie è convergente per $\alpha = 0$ e per $\alpha > 1$**