

Corsi di Laurea in IADA – Chimica
Esame di Analisi Matematica 1 – Matematica 1 con esercitazioni
23/02/2024 – Fila B

Nome e Cognome.....

Corso di Laurea IADA ☐ Chimica ☐

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+2+3+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, **giustificando le risposte**.

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x + \cos x}{\sqrt{x} \sin x - x} = \boxed{-\frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x + \cos x}{\sqrt{x} \sin x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\arctan x + \frac{\cos x}{x})}{x(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x + \frac{\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 1}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

si può concludere.

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sin x)}{x} = \boxed{1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

si può concludere.

iii)

$$\lim_n n \sqrt[3]{\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}},$$

$$\lim_n n \sqrt[3]{\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_n \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x - \sin x}{x^3}}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

si può concludere.

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log(1 + \sin^2 x^3) + x^3}{x^2} = \boxed{+\infty}.$$

Osservo che

$$0 \leq \log(1 + \sin^2 x^3) \leq \log 2,$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log(1 + \sin^2 x^3)}{x^3} = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log(1 + \sin^2 x^3) + x^3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{2 \log(1 + \sin^2 x^3)}{x^3} + 1 \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2 \log(1 + \sin^2 x^3)}{x^3} + 1 \right) \end{aligned}$$

e si conclude.

Esercizio 2. (6 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2}x$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Limiti agli estremi del dominio:

iii) Eventuali asintoti:

iv) Derivata prima $f'(x) =$

v) Segno della derivata prima:

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) derivata seconda $f''(x) =$

viii) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2 pt)

Sia $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Sia $f(1) = -1$, $f(2) = 2$, $f(3) = -2$, $f(4) = -1$.

i) Si provi che l'equazione $f(x) = -1$ ha almeno 3 soluzioni.

ii) Si provi che f non può essere né concava né convessa.

Esercizio 4. (2+2+2+2pt)

i) Calcolare

$$\int_2^3 \frac{x}{x-1} dx = \boxed{}.$$

ii) Determinare la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione $\frac{1}{1+2x}$ con $x_0 = 0$ e $n = 2$.

iii) Si trovino tutti numeri complessi z tali che

$$z + \bar{z} - 1 = 0 \quad \text{e} \quad |z| = 1.$$

iv) Si provi che per ogni $n \geq 2$ vale

$$4^n - 3^n \geq 4^{n-1} + 3^{n-1}.$$