

Corsi di Laurea in IADA – Chimica
Esame di Analisi Matematica 1 – Matematica 1 con esercitazioni
09/01/2025 – Fila B

Nome e Cognome.....

Ho svolto gli esercizi STACK e ho ottenuto un punteggio maggiore o uguale a 6 su ciascuno dei 10 fogli: si ☐ no ☐

Se ammesso, farò l'orale il 10 gennaio 2025: si ☐ no ☐

Corso di Laurea IADA ☐ Chimica ☐

Scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+2+3+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, **giustificando le risposte**.

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x + \cos x)}{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2 + \sin x)} = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x^2(x-1)} = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x)}{\log(1+x^3)} = \boxed{},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\sqrt[4]{x}} - (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt, di cui 3 per l'ultima domanda)

Si studi la funzione

$$f(x) = x^2 + x + \log(1-x)$$

determinando:

i) Dominio:

.

ii) Limiti agli estremi del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$

iv) Segno della derivata prima:

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$

vii) Segno della derivata seconda:



viii) Grafico di f .

ix) Dire, al variare di α in $\mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 + x + \log(-x + 1) = \alpha.$$

(Se serve, utilizzare il valore $0,693$ come approssimazione di $\log 2$ con errore inferiore a 10^{-3} .)

Esercizio 3. (2+2+2 pt)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si supponga che

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -2\}$ e $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < -2\}$.

- i) Dire, giustificando la risposta, se esiste un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) < -10$.

- ii) Provare che E è non vuoto.

- iii) Provare che F è aperto.

Esercizio 4. (2+3+1 pt)

- i) Scrivere la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione

$$f(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

con $x_0 = 0$ e $n = 2$.

ii) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 x \, dx = \boxed{}.$$

iii) (esame da 10 CFU) Dire per quali valori di $\alpha \in [0, +\infty[$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + 2\right).$$

iii) (esame da 9 CFU) Dire se la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_1^{1+2x} \cos^2(\pi t) \, dt.$$

è crescente sull'intervallo $[0, 1[$.