

Corsi di Laurea in IADA – Chimica
Esame di Analisi Matematica 1 – Matematica 1 con esercitazioni
04/02/2025 – Fila A

Nome e Cognome.....

Ho svolto gli esercizi STACK e ho ottenuto un punteggio maggiore o uguale a 6 su ciascuno dei 10 fogli: si ☐ no ☐

Corso di Laurea IADA ☐ Chimica ☐

Scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+2+3+3 pt)

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti, **giustificando le risposte**.

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^3 + \sin x}{\sqrt[3]{x} + x\sqrt[4]{x} + x^2\sqrt[5]{x}} = \boxed{},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \log\left(1 + \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\right) = \boxed{},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \tan x^2}{x^6} = \boxed{},$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

determinando:

i) Dominio:

.

ii) Segno:

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

vi) Segno della derivata prima:

vii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

viii) Derivata seconda $f''(x) =$

ix) Segno della derivata seconda:

x) Grafico di f .

xi) Detto D il dominio di f , determinare $f(D)$:

xii) Dire, al variare di α in $\mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \alpha.$$

Esercizio 3. (2+2+2 pt)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2. \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

- i) Provare che esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 < 0 < x_2$, $f(x_1) < -1$ e $f(x_2) > 1$.

- ii) Se la f è continua, provare che esiste un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

- iii) Se la f è derivabile, provare che esiste un valore $x^* \in \mathbb{R}$ tale che $f(x^*) > 0$.

Esercizio 4. (1+3+2 pt)

- i) Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$z(\bar{z} + 1) = 1.$$

ii) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$$

iii) (esame da 10 CFU) Dire per quali valori di $\alpha \in [0, +\infty[$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)^\alpha$$

iii) (esame da 9 CFU) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} e^{t^2} dt}{2x}.$$