

Corso di Laurea in IADA - Corso di Laurea in Chimica
Esame di Analisi Matematica 1 – Matematica 1 con esercitazioni
Esempi di domande per la prova orale
ATTENZIONE: le domande dell'orale non sono solo queste, ma ce
ne potrebbero essere altre

- 1) Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$. Sia α un numero reale. Si dica quale condizione deve soddisfare α per essere l'estremo superiore di E .
 - 2) L'estremo superiore (inteso come numero reale) di un insieme esiste sempre? Se l'estremo superiore esiste, è unico?
 - 3) Si dica quali condizioni devono valere per E affinché in $\mathbb{R}$ esista l'estremo superiore di E .
 - 4) Si enunci e si dimostri il teorema sulla proprietà di Archimede per $\mathbb{R}$.
-

- 1) Siano x_0 un punto di $\mathbb{R}$ e U un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. U si dice intorno di x_0 se ...
 - 2) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. A si dice aperto se...
 - 3) Sia C un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. C si dice chiuso se...
 - 4) Siano x_0 un punto di $\mathbb{R}$ e E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. x_0 si dice punto di accumulazione per E se...
 - 5) Si enunci e si dimostri il primo teorema di Bolzano-Weierstrass.
-

- 1) Si dica che cosa è una successione a valori in $\mathbb{R}$.
 - 2) Si dica che cosa è una sottosuccessione di una successione a valori in $\mathbb{R}$.
 - 3) Si dia la definizione di successione a valori in $\mathbb{R}$ **limitata**.
 - 4) Si dia la definizione di successione a valori in $\mathbb{R}$ **convergente a un valore** $\bar{x} \in \mathbb{R}$.
 - 5) Si enunci e si dimostri il **secondo teorema di Bolzano-Weierstrass**.
-

- 1) Sia $\bar{x} \in E \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $l \in \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l ?$$

- 2) Supponiamo che $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ e che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = m,$$

con $l, m \in \mathbb{R}$. Quanto vale

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + g(x) ?$$

3) Sia $\bar{x} \in E \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty ?$$

4) Supponiamo che $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ e che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = m,$$

con $m \in \mathbb{R}$. Quanto vale

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + g(x) ?$$

Giustificare la risposta.

-
- 1) Si dica che cosa è una successione a valori in $\mathbb{R}$.
 - 2) Data una successione $(x_n)_n$ a valori in $\mathbb{R}$ e $\bar{x}$ un punto di $\mathbb{R}$, cosa significa che la successione $(x_n)_n$ è convergente a $\bar{x}$?
 - 3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $\bar{x}$ un punto di $\mathbb{R}$. Cosa significa che f è continua in $\bar{x}$?
 - 4) Se $(x_n)_n$ è una successione convergente a $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, è vero che $(f(x_n))_n$ è una successione convergente a $f(\bar{x})$? Perché?

-
- 1) Definizione di **successione** a valori in un insieme qualunque A .
 - 2) Definizione di **successione** a valori in $\mathbb{R}$, **limitata**.
 - 3) Definizione di **successione** a valori in $\mathbb{R}$, **convergente**.
 - 4) Definizione di **successione** a valori in $\mathbb{R}$, **di Cauchy**.
 - 5) Enunciato e dimostrazione del **teorema di completezza di $\mathbb{R}$** .

-
- 1) Cosa vuol dire che f è **monotona crescente** in $]a, b[$?
 - 2) È vero che se f è **monotona crescente** in $]a, b[$ allora f è **continua** in $]a, b[$?
 - 3) Si dimostri che se f è **monotona crescente** in $]a, b[$ allora esiste $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Quanto vale questo limite?

-
- 1) Sia $\bar{x} \in [a, b]$, sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che f è **continua** in $\bar{x} \in [a, b]$? Cosa vuol dire che f è **continua** in $[a, b]$?
 - 2) Si enunci e si dimostri il teorema degli zeri.

-
- 1) Sia $\bar{x} \in [a, b]$, sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che f è **continua** in $\bar{x}$? Cosa vuol dire che f è **continua** in $[a, b]$?

- 2) Sia $\bar{x} \in [a, b]$, sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $\bar{x}$?
Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $]a, b[$?
 - 3) Se f è derivabile in $\bar{x}$ allora f è continua in $\bar{x}$? Giustificare la risposta.
 - 4) Se f è continua in $\bar{x}$ allora f è derivabile in $\bar{x}$? Giustificare la risposta.
-

- 1) Sia $\bar{x} \in]a, b[$, sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che f è **crescente** in $]a, b[$?
 - 2) Supponiamo che f sia **derivabile** in $]a, b[$. Che condizione si può porre sulla derivata di f per dedurre che f è crescente? Si giustifichi la risposta.
-

- 1) Sia $\bar{x} \in]a, b[$, sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $\bar{x}$?
Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $]a, b[$?
 - 2) Cosa vuol dire che f in $\bar{x}$ ha un punto di massimo relativo?
 - 3) Se f è **derivabile** in $\bar{x}$ è punto di massimo relativo, quanto vale la derivata in $\bar{x}$?
 - 4) Si enunci il teorema di Fermat.
 - 5) Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.
-

- 1) Sia $\bar{x} \in]a, b[$, sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $\bar{x}$?
Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $]a, b[$?
 - 2) Cosa vuol dire che f in $\bar{x}$ ha un punto di massimo relativo? Se f è **derivabile** in $\bar{x}$ è punto di massimo relativo, quanto vale la derivata in $\bar{x}$?
 - 3) Si enunci e si dimostri il teorema di Rolle.
-

- 1) Sia $\bar{x} \in]a, b[$ e sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $\bar{x}$? Cosa vuol dire che f è **derivabile** in $]a, b[$?
 - 2) Si enuncino, senza dimostrali, i teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
 - 3) Si provi che se f è derivabile in $]a, b[$ e per ogni $x \in]a, b[$ si ha $f'(x) = 0$ allora f è costante.
 - 4) Supponiamo che il dominio di f sia $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che f sia derivabile con derivata nulla. f è costante? Giustificare la risposta.
-

- 1) Si enunci e si dimostri il teorema di de l'Hôpital, nella versione trattata a lezione, cioè nel caso delle funzioni $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabili su $]a, b[$ e che abbiano entrambe il limite, per x che tenda a b da destra pari a 0 (scrivere l'enunciato completo).
-

- 1) Definizione di **funzione** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **limitata**.
- 2) Definizione di **ripartizione di un intervallo** $[a, b]$.

- 3) Definizione di **somma inferiore e somma superiore** relative a una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata e a una ripartizione Δ .
 - 4) Definizione di **funzione integrabile secondo Riemann**.
 - 5) **Condizione equivalente** all'integrabilità secondo Riemann.
-

- 1) Definizione di **funzione** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **limitata**.
 - 2) Definizione di **ripartizione di un intervallo** $[a, b]$.
 - 3) Definizione di **somma inferiore e somma superiore** relative a una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata e a una ripartizione Δ .
 - 4) Definizione di **funzione integrabile secondo Riemann**.
 - 5) **Condizione equivalente** all'integrabilità secondo Riemann.
 - 6) Enunciato e dimostrazione del **Teorema di integrabilità delle funzioni monotone**.
-

- 1) Si dia la definizione di **funzione** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **limitata**.
- 2) Si dia la definizione di **ripartizione di un intervallo** $[a, b]$.
- 3) Si dia la definizione di **somma inferiore e somma superiore** relative a una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata e a una ripartizione Δ .
- 4) Si dia la definizione di **funzione integrabile secondo Riemann**.
- 5) Si enunci e si dimostri il **Teorema di integrabilità delle funzioni continue**.