Esercizi n.1

key words: Numeri naturali, operazioni con i numeri naturali, ordinamento dei numeri naturali. Assiomi di Peano. Principio di induzione. Dimostrazioni con il principio di induzione. Disposizioni di n oggetti a k a k. Permutazioni di n oggetti. Fattoriale di n. Combinazioni di n oggetti a k a k. Coefficienti binomiali. Triangolo di Tartaglia. Binomio di Newton.

1) Utilizzando il principio di induzione si provi che

a)

$$n! \geq 2^{n-1}, \qquad \sum_{j=0}^{n} j^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2, \qquad a^n - b^n = (a-b)(\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j});$$

b) per ogni $n \geq 1$, il numero $f(n) = n^3 + 5n$ è divisibile per 6;

c) per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $n \geq 2$ vale

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{(n-1)n}{2}\alpha^2;$$

d) date n rette del piano, non parallele e a tre a tre non passanti per lo stesso punto, queste individuano sul piano $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioni.

2) Utilizzando il principio di induzione si dimostrino i seguenti teoremi

a) Sia T un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Se $0 \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, dall'essere $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq T$ discende che $\{0, 1, \ldots, n+1\} \subseteq T$, allora $T = \mathbb{N}$ (*forma debole del principio di induzione*).

b) Sia T un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Se $T \neq \emptyset$ allora T ha un minimo (*principio del buon ordinamento*).

3) Provare che

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n, \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0 \text{ (per } n \geq 1\text{)}, \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}.$$

4) Provare che

a) se $p \in [0, 1]$,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{n-j} (1-p)^j = 1;$$

b) sia $p \geq 0$ un numero naturale fissato; per ogni $n \geq p$ si ha

$$\sum_{j=p}^{n} \binom{j}{p} = \binom{n+1}{p+1};$$

c) per ogni $n \geq 0$ si ha che $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11.