

Soluzioni Tutorato Analisi 1: Foglio 1

Alessandro Tamai e Riccardo Caniato

21 ottobre 2018

Esercizio 1

a) Dimostriamo le seguenti equazioni e disequazioni per induzione

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \sum_{j=0}^n j^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad a^n - b^n = (a-b) \left[\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j-1} \right]$$

L'idea di base è di cercare di esprimere la relazione $n+1$ -esima in termini di quella n -esima, di cui conosciamo la validità.

i) Osserviamo che la prima diseuguaglianza è vera per $n=0$. Supponiamo per ipotesi induttiva che valga

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Dimostriamo che

$$(n+1)! \geq 2^n$$

Esprimiamo il primo termine come

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

dunque utilizzando l'ipotesi induttiva

$$(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$

ma, per $n > 0$, si ha che $n+1 \geq 2$ da cui

$$(n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

ovvero la tesi.

ii) Osserviamo che l'uguaglianza è vera per $n=0$. Anche qui sfruttiamo la stessa idea, partendo dalla sommatoria. Supponiamo l'equazione sia vera per n , ovvero valga

$$\sum_{j=0}^n j^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Dimostriamo che è vera

$$\sum_{j=0}^{n+1} j^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Spezziamo la somma $n+1$ -esima esprimendola così in funzione di quella n -esima, dopodiché utilizziamo l'ipotesi induttiva sulla somma n -esima

$$\sum_{j=0}^{n+1} j^3 = \sum_{j=0}^n j^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

Raccogliendo il termine $(n+1)^2$ otteniamo

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

da cui la tesi.

iii) Dimostriamo ora che

$$a^n - b^n = (a-b) \left[\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j-1} \right]$$

Osserviamo che l'uguaglianza è vera per $n=0$. Supponendo quindi vera l'uguaglianza in n , dimostriamo essere vera anche la seguente

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \left[\sum_{j=0}^n a^j b^{n-j} \right]$$

Sviluppiamo la somma a destra

$$(a-b) \left[\sum_{j=0}^n a^j b^{n-j} \right] = (a-b) \left[\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j} + a^n b^{n-n} \right] = (a-b) \left[b \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j-1} + a^n \right] =$$

sviluppando il prodotto otteniamo

$$= b(a-b) \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j-1} + (a-b)a^n =$$

Possiamo così ora utilizzare l'ipotesi induttiva ottenendo

$$= b(a^n - b^n) + (a-b)a^n = ba^n - b^{n+1} + a^{n+1} - ba^n = a^{n+1} - b^{n+1}$$

da cui la tesi.

b) Dimostriamo che

$$f(n) = n^3 + 5n$$

è divisibile per 6. Per $n=0$, $f(0)=6$ è divisibile per 6. Mostriamo quindi che assumendo $f(n)$ sia divisibile per 6, lo è anche

$$f(n+1) = (n+1)^3 + 5(n+1)$$

Esprimiamo quindi $f(n+1)$ in funzione di $f(n)$

$$f(n+1) = (n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + (3n^2 + 3n + 6) =$$

$$= f(n) + 3[n(n+1) + 2]$$

Quindi concludiamo che $f(n+1)$ è divisibile per 6 se e solo se lo sono i due termini

$$f(n) \quad 3[n(n+1) + 2]$$

Per l'ipotesi induttiva noi sappiamo che ciò è vero per $f(n)$, basta quindi dimostrare che anche il secondo termine è divisibile per 6. Osserviamo che $n(n+1)$ è per ogni n il prodotto di un numero pari ed un numero dispari (è il prodotto di un numero naturale ed il suo successivo), dunque posto

$$k = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

possiamo riformulare il secondo termine come

$$3[n(n+1) + 2] = 3[2k + 2] = 6[k + 1]$$

che è quindi chiaramente divisibile per 6.

c) Vogliamo dimostrare che

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

per $\alpha > 0$ ed $n \geq 2$. Supponiamo vera la relazione per n , e dimostriamo che

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

Iniziamo col sviluppare il termine a sinistra ed utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^{n+1} &= (1 + \alpha)(1 + \alpha)^n \geq (1 + \alpha) \left[1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 \right] = \\ &= 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \alpha + n\alpha^2 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^3 = \\ &= 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^3 \end{aligned}$$

Ma se $\alpha > 0$

$$\geq 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

d) Supponiamo per ipotesi induttiva che n rette dividano il piano in

$$\frac{n^2 + n + 2}{2}$$

regioni. Se ora aggiungiamo una retta, non potendo essere parallela alle altre, le intersecherà in n punti; tali punti dovranno inoltre essere distinti, in quanto per ipotesi non possono passare più di due rette per uno stesso punto. Quindi, la nuova retta che abbiamo aggiunto, sarà divisa in $n+1$ segmenti (limitati o illimitati) ognuno dei quali dividerà una precedente regione in due. Concludiamo così che si creano $n+1$ nuove regioni. Da cui

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 &= \frac{n^2 + n + 2 + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 + (n+1) + 2}{2} = \\ &= \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 1

a) Dimostriamo il principio di induzione debole, ovvero che, dato un'insieme $T \subseteq \mathbb{N}$ con le proprietà:

- $0 \in T$
- Se un insieme del tipo $\{0, \dots, n\} \subseteq T$ allora anche

$$\{0, \dots, n+1\} \subseteq T$$

significa che $T = \mathbb{N}$. Consideriamo l'insieme

$$U = \{m \in \mathbb{N} \mid \{0, \dots, m\} \subseteq T\}$$

Se $0 \in T$ allora $0 \in U$. Ma, per la definizione di T , se $k \in U$ anche $k+1 \in U$ in quanto se $k \in U$ significa che $\{0, \dots, k\} \subseteq T$ e quindi dalla proprietà di T anche $\{0, \dots, k+1\} \subseteq T$, da cui $k+1 \in U$. Riassumendo,

- $0 \in U$
- se $k \in U \Rightarrow k+1 \in U$

Quindi, per il principio di induzione, $U = \mathbb{N}$ e ciò significa che anche $T = \mathbb{N}$.

b) Dimostriamo che ogni sottoinsieme T di $\mathbb{N}$ non vuoto ammette un minimo. Ricordiamo che T ammette un minimo se esiste un naturale $\bar{m}$ tale che:

- $\bar{m} \leq n$ per ogni $n \in T$.
- $\bar{m} \in T$.

Procederemo nel seguente modo: dimostriamo per assurdo la tesi, provando per induzione che se T non ha minimo, il suo complementare deve essere tutto $\mathbb{N}$, ovvero $T = \emptyset$ in contraddizione con le ipotesi. Osserviamo che se T non ammette minimo, $0 \notin T$, altrimenti sarebbe il suo minimo in quanto per gli assiomi di Peano per ogni naturale n

$$0 \leq n$$

Se consideriamo quindi l'insieme complementare $C := \mathbb{N} \setminus T$ si ha che deve essere non vuoto e contenere lo zero. Supponiamo quindi C contenga tutti i numeri da 0 ad n per un qualche naturale n , eventualmente nullo, ovvero un insieme del tipo

$$\{0, \dots, n\} \subset C$$

con $n \geq 0$. Allora C dovrebbe contenere anche $n+1$, altrimenti $n+1$ sarebbe minimo di T . Dunque C dovrebbe contenere ogni numero naturale, ovvero $C = \mathbb{N}$ da cui la contraddizione, in quanto si avrebbe $T = \emptyset$.

Esercizio 3

i) Proviamo che

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

Osserviamo che possiamo ottenere la relazione dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ponendo semplicemente $a = b = 1$. In alternativa, si può provare l'uguaglianza per induzione. Osservato che per $n = 0$ essa risulta valida, supponiamo valga l'uguaglianza n -esima e dimostriamo $n+1$ -esima. Consideriamo

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} + \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1} =$$

Sapendo che

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$$

otteniamo

$$= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} + 2$$

Posto $k = j - 1$, si ha che per $j = 1$, $k = 0$ e per $j = n$, $k = n - 1$. Rinominando gli indici sul secondo termine abbiamo quindi che

$$= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + 2$$

Che possiamo riscrivere come

$$= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} + 2 =$$

utilizzando l'ipotesi induttiva sui primi due termini concludiamo così

$$= 2^n + 2^n - 2 + 2 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Ovvero la tesi.

ii) Anche qui, possiamo dimostrare l'uguaglianza dalla formula di Newton, ponendo $a = 1$ e $b = -1$. In alternativa, possiamo dimostrarla per induzione. Osservato che essa è vera per $n = 0$ e supposta vera

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0$$

Consideriamo la somma $n+1$ -esima

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} = 0$$

Sviluppandola

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} = \binom{n+1}{0} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + (-1)^{n+1} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j-1} = \\
&= 1 + (-1)^{n+1} + \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} - (-1)^0 \binom{n}{0} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j-1} =
\end{aligned}$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva e ponendo $k = j - 1$ si ottiene

$$= (-1)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = (-1)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} - (-1)^n \binom{n}{n} \right] = 0$$

iii) Proviamo che

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Consideriamo il polinomio

$$(1+x)^{2n}$$

Possiamo esprimerlo esplicitamente utilizzando il binomio di Newton come

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

Allo stesso modo, però possiamo esprimerlo come prodotto di due polinomi

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$$

per il binomio di Newton possiamo esprimere i due termini (utilizzando per uno, $a = 0$ e $b = x$, l'altro $a = x$ e $b = 0$) come

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j}$$

quindi il loro prodotto sarà

$$(1+x)^n (1+x)^n = \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} \right] = \sum_{j,k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} x^k x^{n-j}$$

Quindi abbiamo l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \sum_{j,k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} x^k x^{n-j}$$

Abbiamo un'uguaglianza fra due polinomi in x che devono essere uguali. Questo significa che lo devono essere i coefficienti della stessa potenza in x . Quindi, se confrontiamo i coefficienti della potenza n -esima, per il primo membro esso sarà

$$\binom{2n}{n}$$

mentre al secondo membro, la potenza n -esima sarà quella definita dagli indici $k = j$, in questo modo infatti, nella sommatoria si ottiene

$$x^{n-k+j} = x^n$$

ma, per $k = j$ si ha proprio la somma

$$\sum_{j=k}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$$

Da cui si giunge alla tesi.

Esercizio 4

Proviamo che per ogni numero reale $p \in (0, 1)$

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{n-j} (1-p)^j = 1$$

Osservato l'uguaglianza per $n = 0$ è vera per ogni $p \in (0, 1)$, dimostriamo che

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{n+1-j} (1-p)^j = 1$$

assumendo l'ipotesi induttiva. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{n+1-j} (1-p)^j &= p^{n+1} + (1-p)^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} p^{n+1-j} (1-p)^j = \\ &= p^{n+1} + (1-p)^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} p^{n+1-j} (1-p)^j + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} p^{n+1-j} (1-p)^j = \end{aligned}$$

Possiamo esprimere il secondo termine come

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} p^{n+1-j} (1-p)^j &= p \left[\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} p^{n-j} (1-p)^j \right] = \\ &= p \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{n-j} (1-p)^j - \binom{n}{0} p^n (1-p)^0 \right] = \\ &= p[1 - p^n] = p - p^{n+1} \end{aligned}$$

Ed allo stesso modo il terzo come

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} p^{n+1-j} (1-p)^j = (1-p) - (1-p)^{n+1}$$

da cui la somma diventa

$$= p^{n+1} + (1-p)^{n+1} + p - p^{n+1} + (1-p) - (1-p)^{n+1} = 1$$

c) Poniamo

$$f(n) = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$$

Dismotriamo che è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, otteniamo $f(0) = 11$ che è divisibile per 11. Dimostriamo quindi per induzione che lo è

$$f(n+1) = 9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1}$$

Possiamo esprimere quest'ultima come

$$f(n+1) = 9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + 64 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + (55+9)2^{6n+1} = 9f(n) + 55$$

che è divisibile per 11, da cui la tesi.