

Esercizi n.2

key words: Numeri reali. Assiomi dei numeri reali. Assioma di separazione o assioma di Dedekind. simboli di $+\infty$ e $-\infty$. Intervalli aperti e chiusi, limitati e illimitati. Insiemi limitati. Massimi e minimi. Maggioranti e minoranti. Estremo superiore e inferiore. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e inferiore. Archimedeità $\mathbb{R}$. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Intervalli chiusi, limitati e inscatolati. Intervalli chiusi, limitati, inscatolati e dimezzati. Funzione valore assoluto, disuguaglianza triangolare.

1) Utilizzando il principio di induzione si provi che, per ogni $n \geq 1$,

a)

$$\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2};$$

b)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

c)

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}.$$

2) Dei seguenti insiemi si dice se hanno massimo e minimo, se ne determini l'insieme dei maggioranti e dei minoranti, si determini sup e inf:

$$[1, 2] \cup]4, 5[, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2}, \frac{1}{4n^2} \right), \quad \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathbb{Q} \cap (1, 2),$$

$$(-\infty, 4) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n} \right) \right), \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \vee \exists n \in \mathbb{N} : x^2 = 3 - \frac{1}{n}\}, \quad (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [1, 2].$$

3) Si provi che se un insieme ha minimo, questo è unico.

4) Sia $-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$. Si provi che $\sup(-A) = -\inf A$.

5) Si provi che se A e B sono due insiemi di numeri reali aventi rispettivamente estremo superiore $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, allora l'insieme $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ ha per estremo superiore $\alpha + \beta$.

6) Si provi che se A e B sono due insiemi di numeri reali positivi aventi rispettivamente estremo superiore $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, allora l'insieme $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ ha per estremo superiore $\alpha\beta$.

7) Si provi che tra due numeri reali vi è sempre un numero irrazionale (i numeri irrazionali sono i numeri reali non razionali).