

# Soluzioni Tutorato Analisi 1: Foglio 2

Alessandro Tamai e Riccardo Caniato

4 novembre 2018

## Esercizio 1

b) Consideriamo la somma

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ovvero in modo compatto

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Essa è verificata per  $n = 1$ . Dimostriamo quindi per induzione: supponiamo valga la relazione per  $n$ , dimostriamola per  $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Sviluppando la somma ed utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} \end{aligned}$$

da cui la tesi.

c) Consideriamo la somma

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$$

Possiamo scriverla in forma compatta come

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\cdots+k} = \frac{2n}{n+1}$$

Ricordiamo che la somma dei primi  $k$  numeri naturali è data dalla formula di Gauss

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

da cui la sommatoria

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

La relazione è vera per  $n = 1$ . Dimostriamo per induzione che essa è valida per ogni  $n$ . Supponiamola vera per  $n$  e dimostriamo la relazione per  $n + 1$ , ovvero che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

Sviluppando tale somma ed utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 2 \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 2 \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)}{(n+2)} \end{aligned}$$

Da cui la tesi.

## Esercizio 2

a) Consideriamo l'insieme

$$A = [1, 2] \cup ]4, 5[$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$$

mentre dei minoranti

$$E_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$$

Inoltre

$$\sup(A) = 5 \quad \inf(A) = \min(A) = 1$$

in quanto  $5 \notin A$  mentre  $1 \in A$ . Dunque ammette minimo ma non massimo.

b) Consideriamo l'insieme

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n+1)^2}, \frac{1}{4n^2} \right)$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{4}\}$$

mentre l'insieme dei suoi minoranti

$$E_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

Inoltre

$$\sup(A) = \frac{1}{4} \quad \inf(A) = 0$$

ma non appartengono all'insieme, che non ammette quindi né minimo né massimo.

c) Consideriamo

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\}$$

mentre l'insieme dei suoi minoranti

$$E_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

Inoltre

$$\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{2} \quad \inf(A) = 0$$

dunque l'insieme ammette massimo ma non minimo.

d) Consideriamo

$$A = \mathbb{Q} \cap (1, 2)$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

mentre l'insieme dei suoi minoranti

$$E_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$$

Inoltre

$$\sup(A) = \max(A) = 2 \quad \inf(A) = \min(A) = 1$$

dunque l'insieme ammette sia massimo che minimo.

e) Consideriamo

$$A = (-\infty, 4) \cup \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$

mentre l'insieme dei suoi minoranti

$$E_m = \emptyset$$

Inoltre

$$\sup(A) = 6 \quad \inf(A) = -\infty$$

Tale insieme è quindi illimitato inferiormente e non ammette massimo in quanto  $6 \notin A$ .

f) Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2 \wedge \exists n \in \mathbb{N} : x^2 = 3 - \frac{1}{n}\}$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{3}\}$$

mentre l'insieme dei suoi minoranti

$$E_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{3}\}$$

Inoltre

$$\sup(A) = \sqrt{3} \quad \inf(A) = -\sqrt{3}$$

g) Consideriamo l'insieme

$$A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [1, 2]$$

L'insieme dei suoi maggioranti è

$$E_M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

mentre l'insieme dei suoi minoranti

$$E_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$

Inoltre

$$\sup(A) = 2 \quad \inf(A) = 1$$

e non ammette né massimo né minimo in quanto  $2 \notin A$  ed  $1 \notin A$ .

### Esercizio 3

Sia  $A \subset \mathbb{R}$ . Ricordiamo che  $\alpha$  è estremo inferiore di  $A$  se

- $\alpha \leq a$  per ogni  $a \in A$ .
- Per ogni  $\alpha' \in \mathbb{R}$  con  $\alpha' < \alpha$  esiste un  $a \in A$  tale che

$$\alpha' < a \leq \alpha$$

Inoltre tale elemento viene detto minimo di  $A$  se

- $\alpha \in A$

Supponiamo quindi che  $A$  ammetta due minimi. Allora essendo entrambi elementi di  $A$ ,

$$\alpha \leq \alpha'$$

$$\alpha' \leq \alpha$$

da cui  $\alpha = \alpha'$ .

**Esercizio 4**

Ricordiamo che possiamo caratterizzare l'estremo superiore  $\alpha$  di un'insieme  $A$  con le condizioni

- $a \leq \alpha$  per ogni  $a \in A$ .
- Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $a \in A$  tale che  $\alpha - \varepsilon < a$

Dimostriamo che  $-\alpha$  è l'estremo inferiore di  $-A$ . Dalla condizione *i*), cambiando segno, si ha che

$$-\alpha \leq -a$$

per ogni  $a \in A$ . Invece, invertendo i segni sulla condizione *ii*)

$$-a < (-\alpha) + \varepsilon$$

che sono proprio le condizioni per cui  $-\alpha$  è l'estremo inferiore di  $-A$ .

**Esercizio 5**

Siano  $\alpha = \sup A$  e  $\beta = \sup B$ . Dimostriamo che

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) = \alpha + \beta$$

Dalla definizione di estremo superiore,  $\alpha \geq a$  per ogni  $a \in A$  e  $\beta \geq b$  per ogni  $b \in B$ . Se quindi  $a + b \in A + B$  si ha che

$$a + b \leq \alpha + b \leq \alpha + \beta$$

Dimostriamo ora la seconda proprietà dell'estremo superiore, ovvero che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un elemento  $a + b \in A + B$  tale che

$$\alpha + \beta - \varepsilon < a + b$$

Dalla stessa proprietà per  $\alpha$  e  $\beta$ , scelto per entrambi  $\frac{\varepsilon}{2}$ , esistono  $a \in A$  e  $b \in B$  tali che

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a$$

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b$$

Da cui

$$\alpha + \beta - \varepsilon = \alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq a + b$$

dunque  $a + b$  è proprio l'elemento di  $A + B$  cercato. questo dimostra che

$$\alpha + \beta = \sup(A + B)$$

**Esercizio 6**

Siano  $\alpha = \sup A$  e  $\beta = \sup B$  di due insiemi positivi, nel senso che

$$a \geq 0 \quad \forall a \in A \quad b \geq 0 \quad \forall b \in B$$

e dimostriamo che

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) = \alpha \cdot \beta$$

i) Dimostriamo la prima condizione. Dalla definizione di estremo superiore,  $\alpha \geq a$  per ogni  $a \in A$  e  $\beta \geq b$  per ogni  $b \in B$ . Se quindi  $ab \in A \cdot B$  si ha che, essendo tutti positivi

$$ab \leq \alpha b \leq \alpha \beta$$

ii) Dimostriamo ora la seconda condizione. Se  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$ , si ha che, essendo gli estremi superiori di due insiemi  $A$  e  $B$  positivi,  $A = \{0\}$  o  $B = \{0\}$  da cui

$$A \cdot B = \{0\}$$

che ha come estremo superiore proprio 0. Se invece  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  dimostriamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un elemento  $ab \in A \cdot B$  tale che

$$\alpha\beta - \varepsilon < ab$$

Dalla stessa proprietà per  $\alpha$  e  $\beta$ , per ogni  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , esistono  $a \in A$  e  $b \in B$  tali che

$$\alpha - \varepsilon_1 < a$$

$$\beta - \varepsilon_2 < b$$

Se ora scegliamo

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\beta} \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$$

Per gli elementi  $a_1$  e  $b_2$  associati a tali  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  abbiamo che il prodotto

$$a_1 b_2 > (\alpha - \varepsilon_1)(\beta - \varepsilon_2) = \alpha\beta - \beta\varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 =$$

sostituendo

$$= \alpha\beta - \varepsilon + \varepsilon_1\varepsilon_2 \geq \alpha\beta - \varepsilon$$

da cui la tesi.

### Esercizio 7

Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri reali qualsiasi. Vogliamo costruire un numero irrazionale che stia fra  $\alpha$  e  $\beta$ . Supponiamo che  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Consideriamo un numero irrazionale qualsiasi, ad esempio  $\pi$ . Osserviamo che per ogni naturale  $n$ , il numero reale

$$\frac{\pi}{n}$$

è irrazionale. Infatti se così non fosse, esisterebbero  $k, m \in \mathbb{Z}$  tali che

$$\frac{\pi}{n} = \frac{m}{k}$$

da cui

$$\pi = \frac{mn}{k} \in \mathbb{Q}$$

ovvero una contraddizione. Quindi

$$\frac{\pi}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

inoltre, se  $r \in \mathbb{Q}$ , si ha che

$$r + \frac{\pi}{n}$$

è irrazionale, altrimenti, se fosse razionale, sia avrebbe

$$r + \frac{\pi}{n} = k \in \mathbb{Q}$$

ovvero

$$\frac{\pi}{n} = k - r \in \mathbb{Q}$$

in quanto la differenza di razionali è razionale. Ora: essendo  $\mathbb{Q}$  denso in  $\mathbb{R}$ , esiste un razionale  $q$  tale che  $\alpha \leq q \leq \beta$  se scegliamo quindi un qualsiasi intero

$$n > \frac{\pi}{\beta - q}$$

si ha che

$$q + \frac{\pi}{n} \leq q + \pi \frac{\beta - q}{\pi} = \beta$$

dunque

$$\alpha \leq q + \frac{\pi}{n} \leq \beta$$

che porta a concludere la densità degli irrazionali in  $\mathbb{R}$ .