

Esercizi n.3

key words: Funzione valore assoluto, disuguaglianza triangolare.

1) Calcolare i seguenti valori assoluti

$$|\frac{2}{3} - \sqrt{2}|, \quad |x - x^2| \text{ per } x \in \mathbb{R}, \quad ||x| - 2x| \text{ per } x \in [0, +\infty).$$

2) Provare che

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x^4| = x^4,$

b) $\neg(\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| = |x| + |y|),$

c) se $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ allora $|x_2| \leq \max\{x_3, -x_1\}.$

3) Risolvere le seguenti equazioni

$$|x - 1| = 2, \quad |x + 1| - |x - 2| = 0, \quad |2x + 5| - x + 5 = 2,$$

$$|x^2| - |x| + 1 = 0, \quad |x^2 + 2x + 1| = 1, \quad x^2 + 3x = |x + 1|.$$

4) Risolvere le seguenti disequazioni

$$x|x| \geq 4x + 1, \quad \frac{|x + 1|}{x - 2} \leq 1, \quad |x + 3| + |2x + 3| \leq 5.$$

5) Si provi che

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, 2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2,$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{|x + y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$