

Soluzioni Tutorato Analisi 1: Foglio 3

Alessandro Tamai e Riccardo Caniato

4 novembre 2018

Esercizio 2

i) Proviamo che $|x^4| = x^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo

$$x^4 = x^2 x^2$$

prodotto di numeri positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$x^4 > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero $x^4 = |x^4|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ii) La proposizione

$$\neg(\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x + y| = |x| + |y|)$$

è equivalente a

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| \neq |x| + |y|$$

Basta quindi scegliere $x = 1$ e $y = -1$ e tale proposizione è verificata.

iii) Dimostriamo che se $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ allora $|x_2| \leq \max\{x_3, -x_1\}$. Distinguiamo due casi:

a) $x_2 \geq 0$, dall'ipotesi $x_2 \leq x_3$, dunque se $-x_1 \leq x_3$ il massimo è x_3 e la disuguaglianza è verificata; in caso contrario se il massimo è $-x_1$ si ha

$$x_2 \leq x_3 \leq -x_1$$

dunque la proposizione è vera se $x_2 \geq 0$.

b) Se invece $x_2 < 0$ dall'ipotesi

$$-x_3 \leq -x_2 \leq -x_1$$

da cui con considerazioni analoghe a quelle del punto precedente, si ha la tesi.

Esercizio 3

i) Consideriamo l'equazione

$$|x - 1| = 2$$

Per $x > 1$ assume la forma

$$x - 1 = 2$$

da cui la soluzione $x = 3$ mentre per $x \leq 1$ assume invece la forma

$$-x + 1 = 2$$

che ha soluzione $x = -1$.

ii) Consideriamo l'equazione

$$|x + 1| = |x - 2|$$

Affinchè sia soddisfatta, i due argomenti della funzione valore assoluto ai due membri devono essere uguali oppure uno l'opposto dell'altro. Quindi le soluzioni sono per

$$x + 1 = x - 2$$

che non ammette soluzioni, oppure per

$$x - 1 = -x + 2$$

che ha soluzione $x = \frac{1}{2}$.

iii) Consideriamo l'equazione

$$|2x + 5| - x + 5 = 2$$

distinguiamo due casi

a) Se $2x + 5 \geq 0$ ovvero

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

assume la forma

$$2x + 5 - x + 5 = 2$$

che non ammette soluzione per $x \geq -\frac{5}{2}$.

b) Se $x \leq -\frac{5}{2}$ invece, l'equazione assume la forma

$$-2x - 5 - x + 5 = 2$$

che non ammette soluzioni $x \leq -\frac{5}{2}$; concludiamo così che l'equazione di partenza non ammette soluzioni.

v) Risolviamo l'equazione

$$|x^2 + 2x + 1| = 1$$

Osserviamo che le soluzioni di

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

sono

$$x_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$$

Quindi l'equazione ammette un'unica soluzione con molteplicità due. Essa rappresenta una parabola tangente all'asse x nel punto $x = -1$, e tale parabola è contenuta nel semipiano $y > 0$. Abbiamo quindi che

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero l'equazione di partenza non è altro che l'equazione

$$x^2 + 2x + 1 = 1$$

ovvero

$$x(x + 2) = 0$$

che ha soluzioni

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

Esercizio 4

i) Risolviamo l'equazione

$$x|x| \geq 4x + 1$$

a) Per $x \geq 0$ l'equazione assume la forma

$$x^2 - 4x - 1 \geq 0$$

il cui insieme di soluzioni (eliminate quelle per $x \leq 0$) è l'insieme

$$I_1 : \quad \{x \geq 2 + \sqrt{5}\}$$

b) Per $x \leq 0$ l'equazione assume invece la forma

$$x^2 + 4x + 1 \leq 0$$

che ha come soluzioni l'insieme

$$I_2 : \quad \{-2 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3}\}$$

Concludiamo così che l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è l'insieme $I_1 \cup I_2$.

Esercizio 5

a) Vogliamo dimostrare che

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq |xy|$$

Osserviamo che sviluppando il quadrato

$$(|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2$$

ma,

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0$$

da cui si ricava che

$$|x|^2 - 2|xy| + |y|^2 \geq 0$$

ovvero

$$\frac{|x|^2 + |y|^2}{2} \geq |xy|$$

da cui la tesi.

b) Consideriamo la disuguaglianza dimostrata nel punto precedente

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq |xy|$$

Ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x = \varepsilon x'$ con $\varepsilon > 0$ otteniamo

$$\frac{\varepsilon^2 x'^2 + y^2}{2} \geq \varepsilon |x'y|$$

da cui dividendo per ε entrambi i membri, si ha la tesi.

c) Per la disuguaglianza triangolare ed essendo la radice quadrata una funzione crescente

$$\sqrt{|x + y|} \leq \sqrt{|x| + |y|}$$

Ora, osserviamo che

$$(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2 = |x| + 2\sqrt{|xy|} + |y| \geq |x| + |y| > 0$$

da cui essendo tutti positivi

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x| + |y|}$$

Componendo quindi le due disuguaglianze si giunge alla tesi.