

Esercizi n.4

key words: Numeri complessi. Somma e prodotto di numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso. Piano di Argand-Gauss. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Forma trigonometrica di un numero complesso. Formula di De Moivre.

1) Trovare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi:

$$\frac{(3+2i)^3 - (2+i)^2}{(1+2i)^2 - (1-i)^3}, \quad \frac{(1-i)^9}{1+i)^7}, \quad \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-3}.$$

2) Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$$-2, \quad -2i, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}, \quad \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1+i}, \quad \frac{i(i+1)}{(\sqrt{3}-i)^2}.$$

3) Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{z-1}{z-i} = 1, \quad z^2 + \bar{z} = 0, \quad iz^2 - 2\bar{z} - 2 - i = 0.$$

4) Disegnare sul piano di Argand-Gauss i seguenti insiemi:

$$E = \{z \in \mathbb{C} : z + 2\bar{z} = 3\}, \quad F = \{z \in \mathbb{C} : |(2+i)z + 2| = 1\},$$

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \geq \operatorname{Im}(i-z)\}.$$

5) Trovare il minimo intero positivo m tale che $(1+i)^m$ sia un numero reale.

6) Trovare tutti i numeri complessi z tali che $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.